MICHEL RENAUD

# PHYSIQUE GÉNÉRALE

# 1

# MÉCANIQUE
# ÉLECTRICITÉ

MICHEL RENAUD
DOMINIQUE SILHOUETTE
ROGER FOURME

# PHYSIQUE GÉNÉRALE

# 1

# MÉCANIQUE
# ÉLECTRICITÉ

# 1

# ESPACES ET VECTEURS

Ce chapitre rassemble des définitions et des résultats d'algèbre vectorielle utilisés en physique. Aussi y aura-t-il peu de démonstrations. L'étudiant, qui en éprouverait le besoin, pourra se reporter aux ouvrages de mathématique qu'il a eus entre les mains pendant ses études secondaires.

## 1. ESPACE DU PHYSICIEN ET ESPACE VECTORIEL DES DÉPLACEMENTS

### 1.1 L'espace $\mathcal{E}$ du physicien

Dans sa démarche quotidienne d'analyse des rapports qui existent entre différentes parties du monde où il vit, le physicien utilise des concepts tels que vitesse, accélération, forces, champs, etc. Or, un examen attentif de ces *grandeurs physiques* montre qu'elles possèdent les propriétés de *vecteurs*, qu'elles dérivent plus particulièrement des *vecteurs déplacements*, l'espace dans lequel on les observe ayant par suite une *structure d'espace vectoriel.*

Cette notion d'espace vectoriel n'est pas intuitive car, en fait, elle ne se confond pas avec celle d'espace ambiant où évoluent les sujets d'étude du physicien : de manière immédiate et pour la physique qui nous préoccupe ici, le physicien parle de points, droites, plans, parallélisme de droites, etc., objets et propriétés de ce que le mathématicien appelle un *espace affine.* Comme l'expérience et la géométrie euclidienne nous enseignent, qu'en dernier recours, tous les objets et propriétés ci-dessus peuvent être décrits en termes de *points* appartenant à un espace de dimension 3, *l'espace du physicien sera donc l'espace affine réel* $\mathcal{E}^3$, noté plus simplement $\mathcal{E}$ dans la suite.

Une notion supplémentaire, sur laquelle nous reviendrons au chapitre 2, celle du *temps*, impose de plus à cet espace $\mathcal{E}$ de permettre l'examen temporel du comportement des sujets qu'il contient : il devient ainsi nécessaire de caractériser dans cet espace des éléments de référence appelés *repères*, objets tels que droites, plans, par rapport auxquels le physicien décrit, de façon précise, l'évolution spatio-temporelle de son sujet d'étude.

## 1.2 La relativité du mouvement

Soit un objet qui se meut dans $\mathcal{E}$. Si nous ne nous intéressons qu'à son déplacement global — dit de *translation* — sans prêter attention à sa *rotation* éventuelle, nous pouvons le réduire par la pensée en l'assimilant à un *point* ou *particule*, objet dont la taille est nulle ou négligeable pour le problème à étudier :

*Exemples :* • un électron dans un tube cathodique;
• une clé à molette lancée en l'air décrit une parabole, trajectoire d'une particule dans un champ de pesanteur uniforme;
• la trajectoire de la Lune autour de la Terre est celle du centre du disque lunaire : pour cette description, la lune est une particule.

Alors, le comportement le plus élémentaire d'une telle particule $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}$ est l'*état de repos*, caractérisé par la coïncidence, à tout instant, de $\mathcal{P}$ avec un point $P \in \mathcal{E}$, le point P étant lui-même immobile par rapport à un repère $R_1$ de $\mathcal{E}$. Or, ce *repos* est tout *relatif*, car rien ne nous interdit d'imaginer que le repère $R_1$ soit lui-même en mouvement par rapport à un autre repère $R_2$ de $\mathcal{E}$. Par rapport à $R_2$, P se déplace avec $R_1$ et la particule $\mathcal{P}$ est donc en *mouvement relatif.*

> La notion de mouvement dans $\mathcal{E}$ (resp. de repos) est une notion relative.

## 1.3 L'espace vectoriel E des déplacements

Considérons l'évolution temporelle d'une particule $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}$ : de façon précise nous dirons qu'elle est en mouvement si, à un instant donné $t_A$ elle occupe la position du point $A \in \mathcal{E}$, et à un instant ultérieur $t_B (t_B > t_A)$, elle se trouve en $B \in \mathcal{E}$. Le changement de position de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}$ est alors représenté par le couple ordonné ou *bipoint* (A, B).

On dessine souvent (fig. 1.1) le changement de position (A, B) en traçant le segment de droite AB, mais *les points autres que* A *et* B *n'ont aucune signification* puisque notre description du mouvement ignore le chemin suivi : $\widehat{AP_0B}$, $\widehat{AP_1B}$ et $\widehat{AP_2B}$ sont équivalents de ce point de vue. Une représentation du bipoint (A, B) pourrait être celle de la figure 1.2.

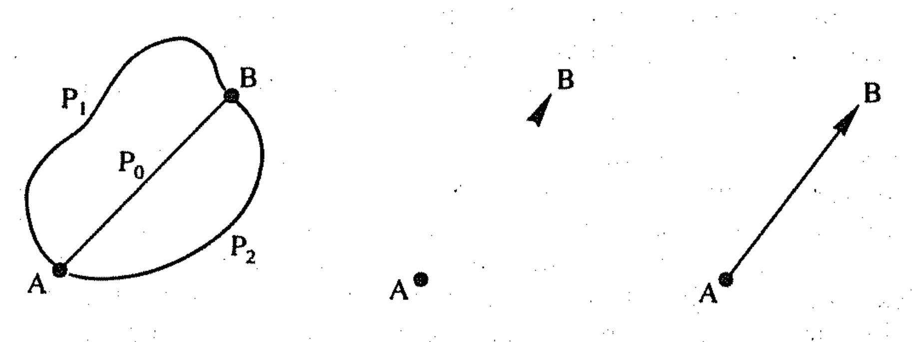



FIG. 1.1. FIG. 1.2. FIG. 1.3.

Sur l'ensemble des bipoints, il est possible de définir une relation d'équivalence appelée *équipollence : la classe d'équivalence de tous les bipoints équipollents de* (A, B) *est le vecteur libre* $\overrightarrow{AB}$ *appelé aussi déplacement* $\overrightarrow{AB}$. La représentation usuelle de ce vecteur est dessinée sur la figure 1.3, mais précisons bien que là aussi le segment AB n'a aucun sens.

A cause de la bijection qui existe entre l'espace affine de points $\mathcal{E}$ et l'espace des scalaires réels $\mathbb{R}^3$, il est possible de définir sur l'ensemble E des déplacements :

1° une *addition*, notée +, impliquant (fig. 1.4) :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC};$$

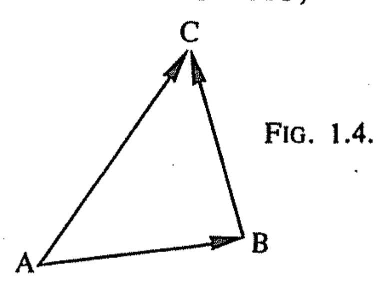



FIG. 1.4.

si l'on pose $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, cette opération vérifie les propriétés :

$P_1$ - *associativité :* $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

$P_2$ - *commutativité :* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

$P_3$ - $\exists$ un *élément neutre* noté $\vec{0}$ tel que $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;

$P_4$ - $\exists \vec{a}'$ *opposé* de $\vec{a}$, ou déplacement symétrique, tel que :

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{a}' + \vec{a} = \vec{0};$$

2° une *multiplication* par un scalaire $\lambda$ de $\mathbb{R}$ : à tout déplacement $\overrightarrow{AB}$, la multiplication par $\lambda$ associe un autre déplacement $\lambda\overrightarrow{AB}$ et vérifie les propriétés :

$P_5$ - $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

$P_6$ - $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

$P_7$ - $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

$P_8$ - $1\vec{a} = \vec{a}$.

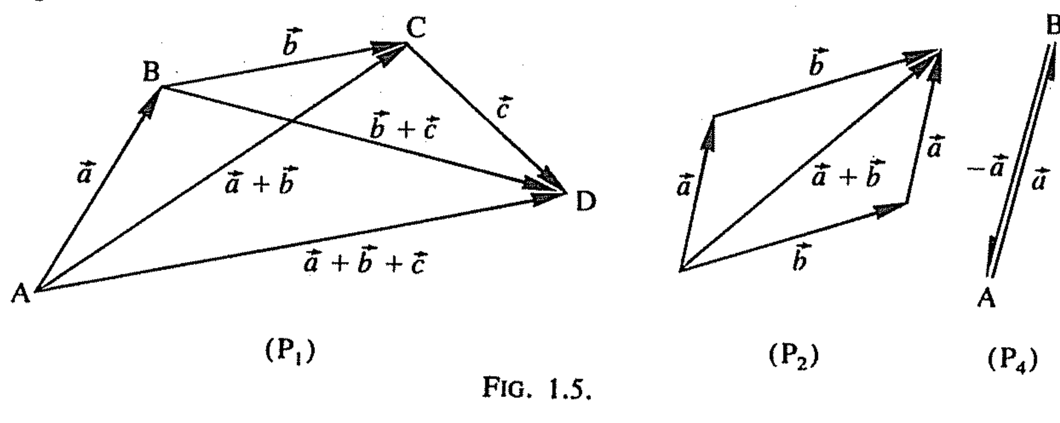



FIG. 1.5.

La figure 1.5 rassemble les représentations usuelles des propriétés $P_1$, $P_2$ et $P_4$.

> Les propriétés $P_1$ à $P_8$ imposent à l'ensemble E des déplacements une structure d'espace vectoriel. Cet espace, de dimension 3 par construction, est attaché à l'espace affine $\mathcal{E}$.

*Remarques :* 1° $\vec{a}' = -\vec{a}$ est le déplacement opposé de $\vec{a}$.

2° si $\vec{b}' = -\vec{b}$, on écrit de manière équivalente :

$$\vec{a} + \vec{b}' = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

3° la figure 1.6 représente ce qu'il est convenu d'appeler la *règle du parallélogramme.* Soient deux déplacements $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ : construisons le parallélogramme ABCD; il est évident que :

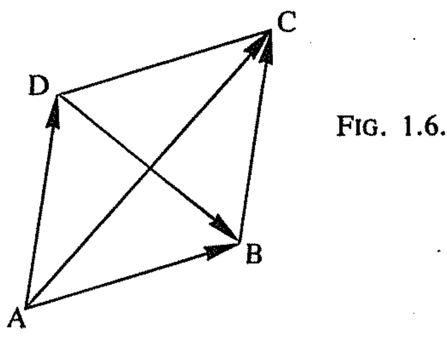



FIG. 1.6.

— la *diagonale issue de* A porte le vecteur *somme* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

— la *diagonale issue de* D porte le vecteur *différence*

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}.$$

## 1.4 Vecteurs liés et vecteurs glissants

Considérons l'ensemble (O; $\mathcal{E}$) des bipoints (O, P) de même origine O : il y a bijection entre cet ensemble et $\mathbb{R}^3$, et l'ensemble $(\overrightarrow{O; \mathcal{E}})$ est un espace vectoriel de dimension 3. Le *vecteur lié* (O, P) est noté $\overrightarrow{OP}$ ou $\vec{r}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'origine : $\vec{r}$ est aussi le *vecteur-position de* P (sous-entendu par rapport à O).

La droite ($\Delta$) unique qui passe par l'origine et l'extrémité d'un vecteur lié est le *support* du vecteur : deux vecteurs équipollents et de même support appartiennent par suite à une même classe d'équivalence dénommée *vecteur glissant.* Deux vecteurs glissants dont les supports sont parallèles sont dits *vecteurs colinéaires.*

## 1.5 Bases de E et repères de (O; $\mathcal{E}$)

Soit l'espace vectoriel E dont une *base* est constituée de trois éléments : $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Ceci sous-entend :

1° $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont linéairement indépendants c'est-à-dire $\nexists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ et non tous nuls, tels que $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}$.

2° $\forall \vec{V} \in E$, $\exists(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\vec{V} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

Les éléments $x_i \in \mathbb{R}$ sont les *composantes scalaires ou algébriques de* $\vec{V}$ dans la base B, et on écrit souvent $\vec{V}$ sous la forme d'une matrice colonne (3, 1) :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Nous avons vu au § 1.4 que l'espace (O; $\mathcal{E}$), c'est-à-dire $\mathcal{E}$ muni d'une origine O, est un espace vectoriel. Il existe une bijection de E sur (O; $\mathcal{E}$) telle qu'à tout vecteur $\vec{V} \in$ E correspond un point unique P de $\mathcal{E}$ vérifiant : $\vec{V} = \overrightarrow{OP}$. Dans E, $\vec{V}$ s'exprime de façon unique sur une base B et il en est de même pour $\overrightarrow{OP}$.

Par définition, si l'espace vectoriel (O; $\mathcal{E}$) admet B pour base, le couple R = (O; B) formé d'un point O de $\mathcal{E}$ et de la base B constitue *un repère de l'espace affine* $\mathcal{E}$; si $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on aura ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.} \tag{1.2}$$

Les scalaires $x$, $y$, $z$, respectivement *abscisse, ordonnée et cote* de P sont les *coordonnées* du point P dans R et on note $P = (x, y, z)$ ou $P\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.$.

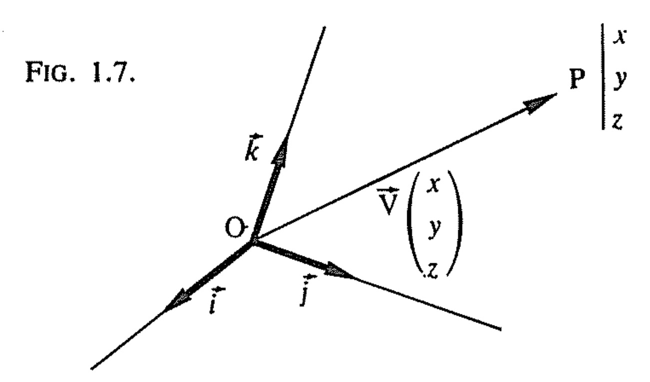



FIG. 1.7.

La figure 1.7 rassemble l'essentiel des résultats de ce paragraphe.

Remarquons que, comme pour les bases de E, il est possible d'envisager des changements de repères de (O; $\mathcal{E}$) : nous reviendrons ultérieurement sur cette propriété importante pour la physique. Signalons simplement ici que ces changements peuvent affecter les deux éléments O et B du repère R = (O; B) : de façon générale, on peut ainsi envisager une *translation* de l'origine : (O; B) $\longrightarrow$ (O'; B), suivie d'un *changement de base* dans (O'; $\mathcal{E}$) : (O'; B) $\longrightarrow$ R' = (O'; B').

## 2. ORIENTATION

### 2.1 Orientation de l'espace $E^1$ et de la droite affine $\mathcal{E}^1$

L'espace vectoriel $E^1$, à une dimension, étant rapporté à une base $B = (\vec{i})$, à tout vecteur $\vec{v} \in E^1$ est associé un *scalaire* $x \in \mathbb{R}$ (appelé *composante* ou *mesure algébrique*) tel que :

$$\vec{v} = x\vec{i}. \tag{1.3}$$

Cette opération *oriente* la droite vectorielle $E^1$ car elle la partage en deux demi-droites, l'une pour laquelle $\vec{v} = x\vec{i}$ avec $x > 0$, l'autre où $\vec{v} = x\vec{i}$ avec $x < 0$.

La droite $\mathcal{E}^1$ munie d'une origine O, étant l'espace vectoriel (O; $\mathcal{E}^1$), s'oriente comme $E_1$ et pour tout point $P \in \mathcal{E}^1$, on a :

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} \tag{1.4}$$

avec $x > 0$ ou $x < 0$.

On voit que les espaces $E^1$ et (O; $\mathcal{E}^1$) ont deux sens d'orientation possibles selon le choix de la base B : l'un des *sens, arbitrairement choisi*, est dit sens *direct*, l'autre étant le sens *rétrograde* (fig. 1.8).

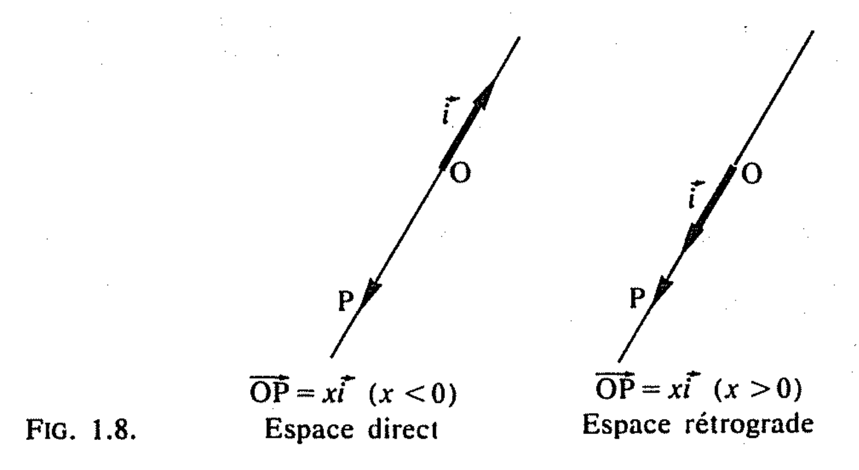



FIG. 1.8.

## 2.2 Orientation de l'espace $E^2$ et du plan affine $\mathcal{E}^2$

$E^2$ étant rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$, à toute autre base $(\vec{u}, \vec{v})$ de $E^2$ est associé le *déterminant non nul de la matrice de passage* d'une base à l'autre :

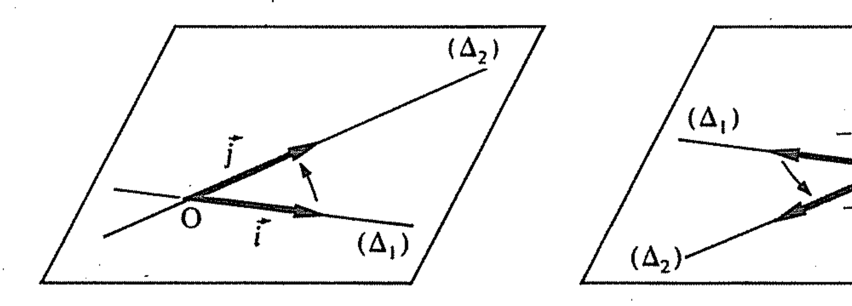
$$\text{si} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Le signe de ce déterminant *oriente* l'espace vectoriel $E^2$ car il partage l'ensemble de ses bases B en deux parties : celle pour laquelle $\det(\vec{u}, \vec{v}) > 0$ et l'autre où $\det(\vec{u}, \vec{v}) < 0$.

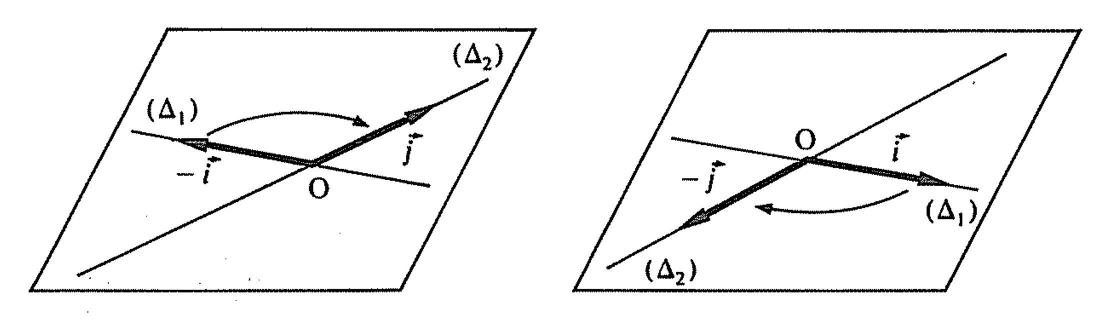
Ce résultat s'étend sans difficulté pour le plan affine muni d'une origine (O; $\mathcal{E}^2$) et les notions de sens direct et rétrograde en découlent de même.

Soit (O; $\mathcal{E}^2$) orienté par la base de sens direct $(\vec{i}, \vec{j})$ : un examen de la figure 1.9 montre que si les bases $(\vec{i}, \vec{j})$, $(-\vec{i}, -\vec{j})$ sont directes, les bases $(-\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{i}, -\vec{j})$ sont rétrogrades : *chaque classe* (directe ou rétrograde) *conserve le sens de la rotation* qui amène le support $(\Delta_1)$ orienté par le premier vecteur de base à coïncider avec le support orienté $(\Delta_2)$ du second et chaque classe est irréductible à l'autre.

Le changement de bases directes entre elles conserve — *pour le cas de la figure 1.9* — le sens conventionnel de la trigonométrie (sens inverse des aiguilles d'une montre), les changements de bases rétrogrades conservant le sens inverse (celui des aiguilles d'une montre).




Bases directes




Bases rétrogrades

FIG. 1.9.

## 2.3 Orientation de l'espace E et de l'espace affine $\mathcal{E}$

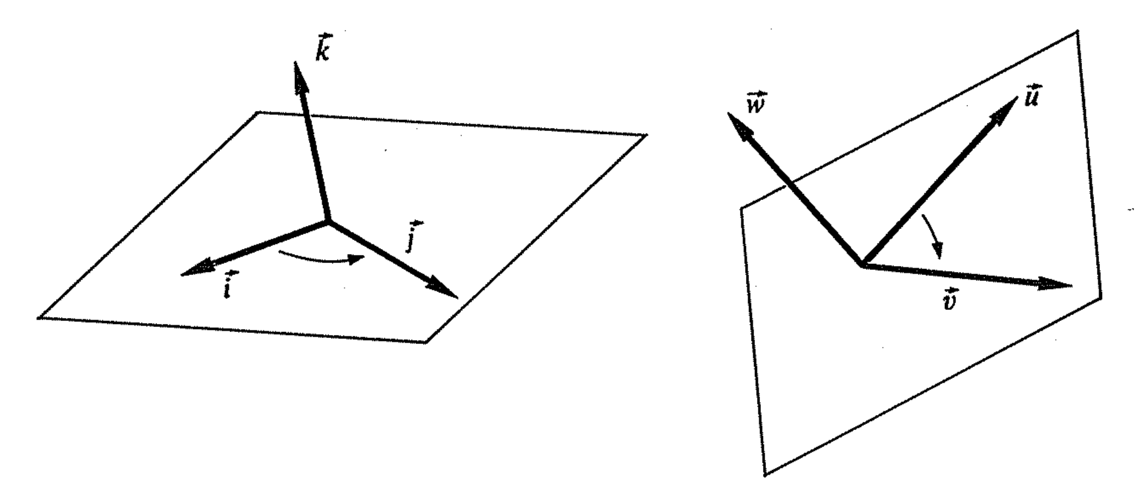
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E : à toute autre base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E est associé le *déterminant non nul de la matrice de passage* d'une base à l'autre :

$$\text{si } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \text{ alors } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

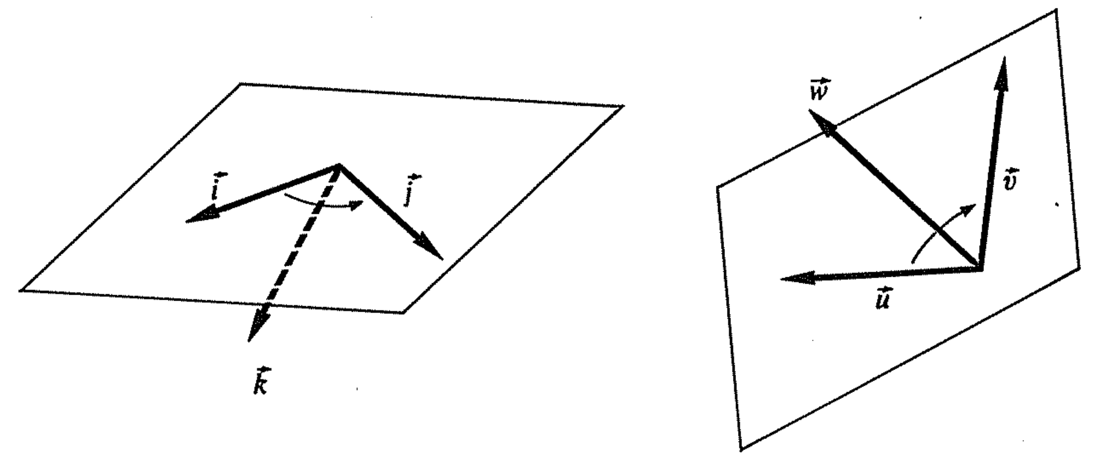
d'où une orientation de E et (O; $\mathcal{E}$) avec sens direct et rétrograde. Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base directe, il en est de même pour toute base dans laquelle on a changé le signe de deux vecteurs :

— bases directes : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(-\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k})$, $(-\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$;
— bases rétrogrades : $(-\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$, $(-\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k})$.

Une base de E ou (O; $\mathcal{E}$) est formée de trois vecteurs linéairement indépendants donc non coplanaires. On peut considérer dans les plans vectoriels engendrés, par exemple, par les deux premiers vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ des bases ci-dessus, le sens des rotations qui amènent le support orienté par $\vec{i}$ sur celui orienté par $\vec{j}$ et le support orienté par $\vec{u}$ sur celui orienté par $\vec{v}$; si, par la pensée, on fait coïncider ces plans vectoriels *orientés*, les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{w}$ appartiennent à un même demi-espace ou à deux demi-espaces disjoints : dans le premier cas $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont de même sens et dans l'autre de sens contraire (fig. 1.10).




$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont de sens contraires.




$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont de même sens.

FIG. 1.10

> *Remarque :* Dans tout ce cours et sauf précision contraire, nous choisirons une *base dextrogyre* $B_0$ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ayant les mêmes positions relatives que le pouce, l'index et le majeur de la main droite$)$ pour orienter l'espace. Toutes les bases directes seront ainsi dextrogyres, les bases rétrogrades étant lévogyres.

## 3. PRODUIT SCALAIRE ET NORME

### 3.1 Définitions

Soient deux supports orientés par deux vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ de E. On désigne par $(\vec{i}, \vec{j})$ l'angle associé à la rotation qui amène le premier support en coïncidence avec le second et par $\overline{U}$, $\overline{V}$ les mesures algébriques respectives de $\vec{U}$, $\vec{V}$ relativement à $\vec{i}$, $\vec{j}$ (§ 2.1).

Le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par le produit des mesures algébriques de ces vecteurs et du cosinus de l'angle $(\vec{i}, \vec{j})$. On note ce produit $\vec{U} \cdot \vec{V}$, ce qui se lit « $\vec{U}$ scalaire $\vec{V}$».

$$\boxed{\vec{U} \cdot \vec{V} = \overline{U}\, \overline{V} \cos(\vec{i}, \vec{j}).} \qquad (1.5)$$

Remarquons que (1.5) n'est pas une loi de composition interne dans E puisque $\vec{U} \cdot \vec{V} \in \mathbb{R}$.

La *norme* associée au produit scalaire est l'application de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\boxed{\vec{U} \longrightarrow \|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}} = |\overline{U}|.} \qquad (1.6)$$

Si $\vec{V} = \vec{U}$ alors $\vec{j} = \vec{i}$ et $\cos(\vec{i}, \vec{j}) = \cos(\vec{i}, \vec{i}) = 1$ : (1.5) entraîne que :

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}} = \sqrt{\overline{U}\, \overline{U}} = |\overline{U}|.$$

*Tout vecteur* $\vec{U}$ *dont la norme vaut* 1 *est dit normé ou unitaire et son support orienté par* $\vec{U}$ *est un axe.*

*Remarque :* pour simplifier l'écriture vectorielle quand il n'y a aucune ambiguïté, nous écrirons dorénavant :

U pour $\overline{U}$ (valeur algébrique de $\vec{U}$)

$|U|$ pour $\|\vec{U}\|$ (norme de $\vec{U}$).

Ainsi :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = UV \cos(\vec{i}, \vec{j});$$
$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}} = \sqrt{U^2} = |U|.$$

Cherchons maintenant si le produit scalaire dépend de l'orientation du plan vectoriel $(\vec{i}, \vec{j})$. Désignons par $\theta$ l'angle $(\vec{i}, \vec{j})$; en nous reportant à la figure 1.9, il apparaît que :

$$(-\vec{i}, -\vec{j}) = (\vec{i}, \vec{j}) = \theta,$$
$$(-\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, -\vec{j}) = -\pi + \theta.$$

A ces changements de base sont associés les changements de signe suivants des mesures algébriques de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$ :

si $\quad (\vec{i}, \vec{j}) \longrightarrow (U, V), \quad (-\vec{i}, -\vec{j}) \longrightarrow (-U, -V),$

$$(-\vec{i}, \vec{j}) \longrightarrow (-U, V),$$
$$(\vec{i}, -\vec{j}) \longrightarrow (U, -V).$$

Au total, nous aurons :

$$(\vec{i}, \vec{j}) \longrightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = UV \cos \theta,$$
$$(-\vec{i}, -\vec{j}) \longrightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = (-U)(-V) \cos \theta = UV \cos \theta,$$
$$(-\vec{i}, \vec{j}) \longrightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = (-U)V \cos(-\pi + \theta) = UV \cos \theta,$$
$$(\vec{i}, -\vec{j}) \longrightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = U(-V) \cos(-\pi + \theta) = UV \cos \theta.$$

Le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}$ des deux vecteurs est donc un *invariant* relativement à l'orientation du plan vectoriel $(\vec{i}, \vec{j})$. Comme, par

adjonction à ce plan d'un vecteur $\vec{k}$ linéairement indépendant des précédents, il est possible d'obtenir une base directe de E (fig. 1.11), on énoncera le résultat précédent de la manière suivante :

> Le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}$ de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de l'ensemble E est invariant relativement à l'orientation de E.

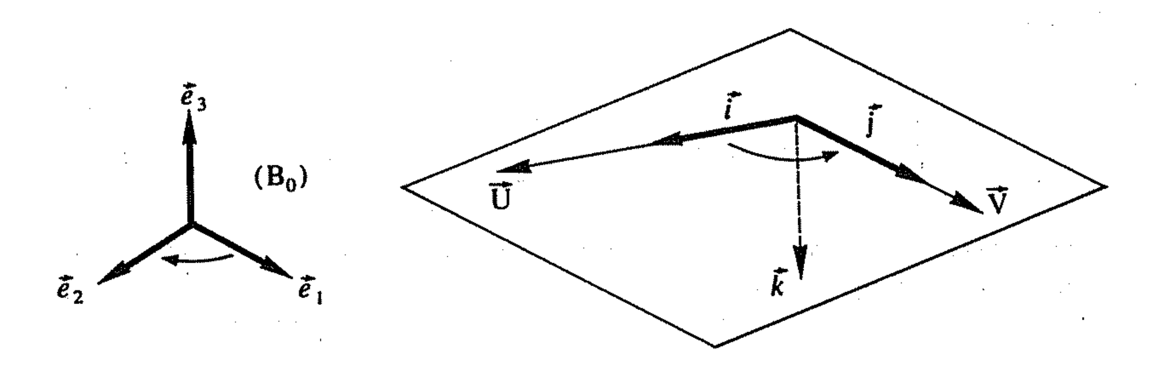



FIG. 1.11.

Cette propriété entraîne une nouvelle définition du produit scalaire mettant mieux en évidence cette invariance; soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs normés $(|u| = |v| = 1)$ de même support et de même sens respectivement que $\vec{U}$ et $\vec{V}$; en prenant $\vec{i} = \vec{u}$ et $\vec{j} = \vec{v}$, il vient :

$$\vec{U} = U\vec{u} = |U|\vec{u}, \quad \vec{V} = V\vec{v} = |V|\vec{v},$$
$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{U}, \vec{V}).$$

Alors :

$$\boxed{\vec{U} \cdot \vec{V} = |U|\,|V| \cos(\vec{U}, \vec{V}).} \tag{1.7}$$

Le changement d'orientation de E change le signe de l'angle $(\vec{U}, \vec{V})$ mais pas la valeur de son cosinus.

Par définition, l'espace vectoriel E muni d'un produit scalaire a une *structure d'espace euclidien et toute base de* E *dont les vecteurs sont normés est dite base normée.*

Deux vecteurs sont *orthogonaux* s'ils sont tous deux non nuls et si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{U} \perp \vec{V} \longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{U} \neq \vec{0}, \ \vec{V} \neq \vec{0} \\ \vec{U} \cdot \vec{V} = 0. \end{array} \right.$$

De (1.7) il résulte que dans E, $\vec{U} \perp \vec{V} \longrightarrow \cos(\vec{U}, \vec{V}) = 0$, soit $(\vec{U}, \vec{V}) = \pi/2$, propriété géométrique que vérifient bien deux vecteurs orthogonaux.

Une base est dite *orthonormée* si ses vecteurs sont tous *normés* et deux à deux *orthogonaux* : soit $B_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base de E dans lequel est

défini le produit scalaire et soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de cet espace euclidien E :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0,$$
$$|i| = |j| = |k| = 1. \tag{1.8}$$

Considérons deux vecteurs de E déterminés par leurs composantes dans B :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{V} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Alors : $\vec{U} \cdot \vec{V} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}).$

En utilisant les propriétés (1.8), il vient

$$\boxed{\vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy' + zz',} \tag{1.9}$$

*forme bilinéaire symétrique* relativement à la base B et autre définition du produit scalaire. La norme euclidienne de $\vec{U}$ relativement à B s'écrit ainsi :

$$\boxed{\|\vec{U}\| = |U| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},} \tag{1.10}$$

exprimant le *théorème de Pythagore.*

*Remarques* : 1° C'est en fait la forme (1.9) exprimée sur la base $B_0$ de E qui définit de façon générale le produit scalaire et la norme, donnant à E sa structure d'espace euclidien. On cherche ensuite les endomorphismes appelés isométries vectorielles ou transformations orthogonales qui conservent dans le plan vectoriel $(\vec{U}, \vec{V})$ la valeur de $\vec{U} \cdot \vec{V}$ : ce sont les rotations vectorielles à partir desquelles on définit la notion d'angle de deux vecteurs normés.

2° Dans l'espace affine $\mathcal{E}$ relativement à *l'espace vectoriel euclidien* E, à tout bipoint (A, B) est associé un vecteur $\overrightarrow{AB} \in E$ : cela induit sur $\mathcal{E}$ une structure d'*espace affine euclidien* et aux notions de norme et orthogonalité de vecteurs correspondent les notions de *distance de deux points* (mesurée physiquement par l'ouverture d'un compas) et *d'orthogonalité de variétés affines* (contrôlée par une équerre à angle droit).

## 3.2 Propriétés

$$\forall \vec{U}_1, \vec{U}_2, \quad \forall \vec{V}, \quad (\vec{U}_1 + \vec{U}_2) \cdot \vec{V} = \vec{U}_1 \cdot \vec{V} + \vec{U}_2 \cdot \vec{V},$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{U}, \vec{V}, \quad (\lambda \vec{U}) \cdot \vec{V} = \lambda (\vec{U} \cdot \vec{V}),$$

et de même par rapport à $\vec{V}$.

$\forall \vec{U}, \vec{V}, \quad \vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$ : le produit scalaire est *commutatif*;

$|U| = 0 \iff \vec{U} = \vec{0};$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{U}, \quad \|\lambda \vec{U}\| = |\lambda| \, |U|;$

$\forall \vec{U}, \vec{V}, \quad \|\vec{U} + \vec{V}\| < |U| + |V|$ (inégalité de Minkowski).

Si l'on note : $\vec{U}\cdot\vec{U} = |U|^2$ par $\vec{U}^2$, carré scalaire de $\vec{U}$ :

$$\forall\vec{U}, \vec{V} \quad (\vec{U} \pm \vec{V})^2 = \vec{U}^2 \pm 2\vec{U}\cdot\vec{V} + \vec{V}^2,$$

$$(\vec{U} + \vec{V})\cdot(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{U}^2 - \vec{V}^2.$$

Pour la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un vecteur $\vec{U}$ de E, on a :

$$x = \vec{U}\cdot\vec{i}, \quad y = \vec{U}\cdot\vec{j}, \quad z = \vec{U}\cdot\vec{k},$$

si

$$\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Soit $\vec{V}'$ le vecteur projection orthogonale de $\vec{V}$ sur $\vec{U}$, et $\vec{U}'$ celui de $\vec{U}$ sur $\vec{V}$ (fig. 1.12). Appelons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs unitaires de $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Alors : $\vec{U} = U\vec{u}$, $\vec{U}' = U'\vec{v}$, $\vec{V} = V\vec{v}$, $\vec{V}' = V'\vec{u}$ implique : $\vec{U}\cdot\vec{V} = UV' = U'V$.

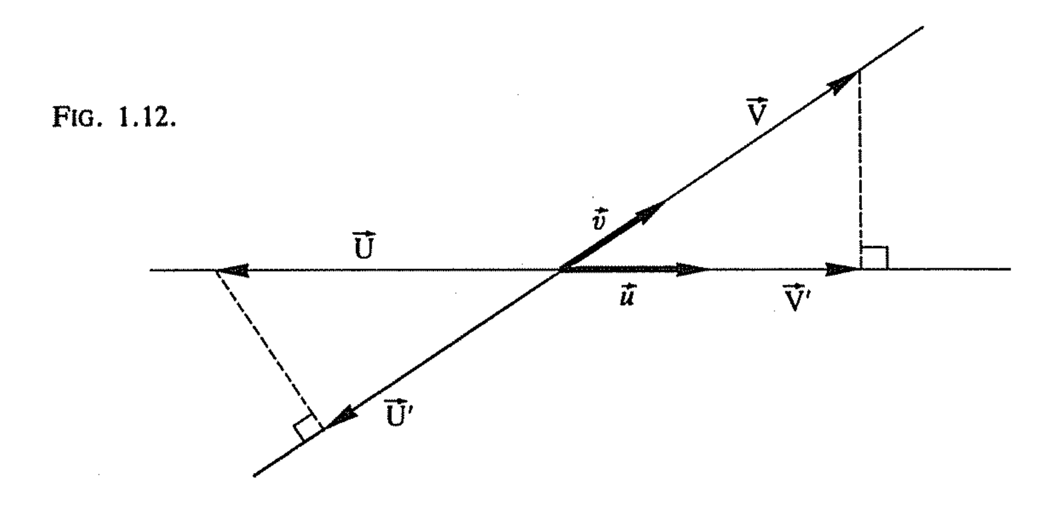


FIG. 1.12.

## 4. PRODUIT VECTORIEL

### 4.1 Définition

Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de E. Par définition :

Le produit vectoriel $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, qui se lit « $\vec{U}$ vectoriel $\vec{V}$ » est l'application de E dans E telle que :

— $\vec{W} = \vec{0}$ si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires ($\vec{V} = \lambda\vec{U}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$);

— $\vec{W}$ est orthogonal au plan ($\pi$) engendré par le couple $(\vec{U}, \vec{V})$ : $\vec{U}\cdot\vec{W} = \vec{V}\cdot\vec{W} = 0$;

— $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ oriente l'espace comme $B_0$;

— sa norme vaut : $|W| = |U||V||\sin(\vec{U}, \vec{V})|$.

$B_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ étant une base directe de E, il en sera de même de $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V})$. Si par contre nous orientons E par la base rétrograde $B'_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_3)$, alors $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}' = \vec{U} \wedge \vec{V})$ sera aussi par définition une base rétrograde de E (fig. 1.13).

*Le sens du produit vectoriel est donc lié à l'orientation de l'espace :* si on passe de la base directe $B_0$ à la base rétrograde $B'_0$ (par ex. en changeant $\vec{e}_3$ en $-\vec{e}_3$), le produit vectoriel $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ tel que $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ soit une base

directe de E comme $B_0$ devient $\vec{W}' = -\vec{W}$ tel que $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}')$ appartienne comme $B'_0$ aux bases rétrogrades de E.

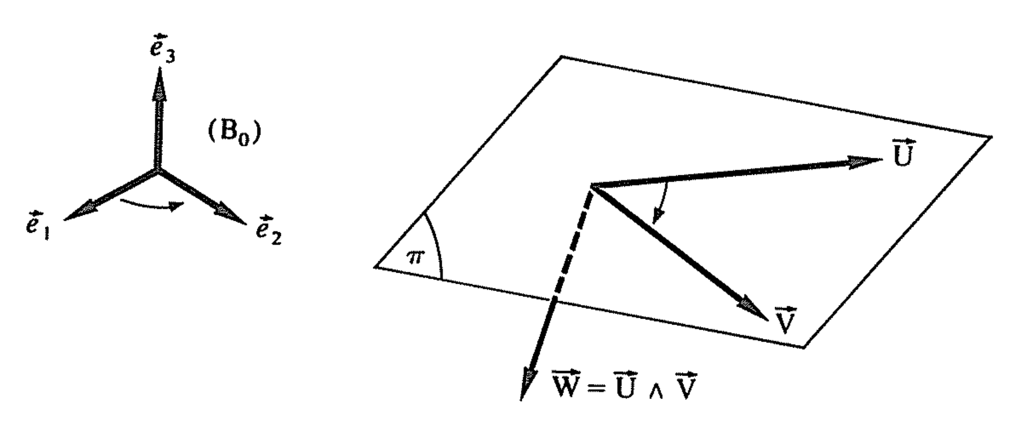
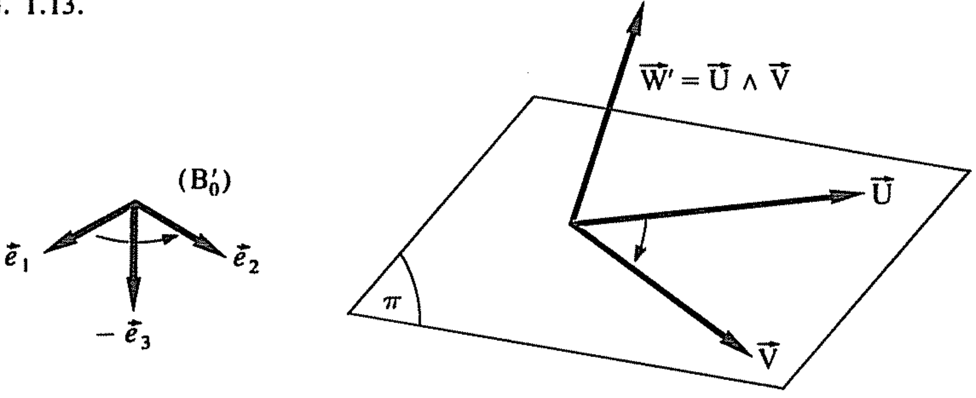



FIG. 1.13.




> Changer l'orientation de l'espace E change le sens de tous les produits vectoriels construit dans E.

## 4.2 Propriétés

— $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ si et seulement si :

$|U| = 0 \longrightarrow \vec{U} = \vec{0}$,

$|V| = 0 \longrightarrow \vec{V} = \vec{0}$,

$\sin(\vec{U}, \vec{V}) = 0 \longrightarrow (\vec{U}, \vec{V}) = 0$ ou $\pi \longrightarrow \vec{V} = \lambda\vec{U}$ c'est-à-dire $\vec{U}$ et $\vec{V}$ colinéaires.

— Le produit vectoriel est *anticommutatif :*

$$\vec{V} \wedge \vec{U} = -\vec{U} \wedge \vec{V}.$$

Changer l'ordre du couple $(\vec{U}, \vec{V})$ revient à changer l'orientation du plan $(\pi)$ donc de la base $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$.

$$\forall\vec{U}, \quad \forall\vec{V}_1, \vec{V}_2, \quad \vec{U} \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{U} \wedge \vec{V}_1 + \vec{U} \wedge \vec{V}_2,$$

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall\vec{U}, \vec{V}, \quad (\lambda\vec{U}) \wedge \vec{V} = \lambda(\vec{U} \wedge \vec{V}),$$

et de même par rapport à $\vec{V}$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *une base orthonormée* directe de E. On a : $\|\vec{i} \wedge \vec{j}\| = |i|\,|j|\,|\sin(\pm\pi/2)| = 1$; le vecteur $\vec{i} \wedge \vec{j}$ est unitaire et tel que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \wedge \vec{j})$ soit une base directe de E : on a donc identité entre $\vec{i} \wedge \vec{j}$ et $\vec{k}$ et de même : $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0, \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}. \end{array}} \qquad (1.11)$$

Soit : $\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$, deux vecteurs quelconques de E. L'utilisation des propriétés ci-dessus et des relations (1.11) entraîne :

$$\boxed{\vec{U} \wedge \vec{V} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k};} \qquad (1.12)$$

(pour retrouver aisément ce résultat, on l'écrit sous la forme :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix},$$

et on développe ce déterminant, dont la première ligne comporte les vecteurs de base, la seconde les composantes algébriques de $\vec{U}$ et la troisième, celles de $\vec{V}$. Ce moyen mnémotechnique n'a naturellement aucune valeur mathématique).

Remarquons enfin que la norme de $\vec{U} \wedge \vec{V}$ mesure l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

## 5. DÉRIVÉES VECTORIELLES

### 5.1 Définitions

Soit E un espace vectoriel. On appelle *fonction vectorielle* $\vec{F}$ dans E d'une variable réelle $t$, toute application de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}$) dans E : si $t \in \mathbb{R}$, $\vec{F}(t) \in E$.

La structure d'un espace vectoriel permet de définir la somme de deux fonctions vectorielles $\vec{F}(t) + \vec{G}(t)$ ainsi que le produit de $\vec{F}(t)$ par un scalaire $\lambda(t)$, lui-même éventuellement application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

> *Exemple :* soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire. Tout vecteur $\vec{U}$ colinéaire de $\vec{u}$, dont la mesure algébrique dépend de la variable $t$ est une fonction vectorielle de $t$ : $\vec{U}(t) = U(t)\,\vec{u}$.

Par définition, on dit que la fonction vectorielle $\vec{F}(t)$ définie sur $]t_0 - h, t_0 + h[$ $(h > 0)$ est dérivable en $t_0$ si la fonction vectorielle $\vec{\Phi}(t)$, telle que :

$$\vec{\Phi}(t) = \frac{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}{t - t_0},$$

admet une limite lorsque $t$ tend vers $t_0$. Cette limite, nouvelle fonction vectorielle de E est appelée *vecteur dérivée première* de $\vec{F}$ en $t_0$ et est notée $\vec{F}'(t_0)$.

$$\boxed{\vec{F}'(t_0) = \lim_{t = t_0} \left[\frac{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}{t - t_0}\right].}$$

La définition précédente ne dépend évidemment pas du choix d'une base dans E.

*Exemple :* la dérivée d'un vecteur constant de E — c'est-à-dire un vecteur indépendant de la variable $t$ — est le vecteur nul :

$$\vec{V} = \vec{V}_0 \longrightarrow \vec{V}' = \vec{0}.$$

La réciproque est vraie.

Comme $\vec{F}'(t)$, vecteur dérivée première de $\vec{F}(t)$ sur tout ou partie de $\mathbb{R}$, est aussi une fonction vectorielle de $t$, on peut envisager l'existence du vecteur dérivée seconde $\vec{F}''(t)$ de $\vec{F}(t)$, etc.

## 5.2 Propriétés

*a*) Si deux vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{G}$ de E sont dérivables en $t_0 \in \mathbb{R}$, leur somme l'est également :

$$(\vec{F} + \vec{G})'(t_0) = \vec{F}'(t_0) + \vec{G}'(t_0) \in \text{E}.$$

*b*) Si un vecteur $\vec{F} \in \text{E}$ et une fonction scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ sont dérivables en $t_0 \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\vec{F}$ l'est aussi, et on a :

$$(\lambda\vec{F})'(t_0) = \lambda'(t_0)\vec{F}(t_0) + \lambda(t_0)\vec{F}'(t_0) \in \text{E}.$$

*c*) Si l'espace vectoriel E est euclidien, $\forall\vec{F}$ et $\vec{G}$ de E dérivables en $t_0 \in \mathbb{R}$, le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{G} \in \mathbb{R}$ est dérivable en $t_0$ et on a :

$$(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t_0) = \vec{F}'(t_0) \cdot \vec{G}(t_0) + \vec{F}(t_0) \cdot \vec{G}'(t_0) \in \mathbb{R}.$$

*d*) Il en sera de même qu'en *c*) pour le produit vectoriel $\vec{F} \wedge \vec{G}$ :

$$(\vec{F} \wedge \vec{G})'(t_0) = \vec{F}'(t_0) \wedge \vec{G}(t_0) + \vec{F}(t_0) \wedge \vec{G}'(t_0) \in \text{E}.$$

*Exemples :* 1° Soit $\vec{a}$ un vecteur de norme constante, c'est-à-dire indépendante de tout paramétrage par une variable :

$$|a|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \text{constante} \longrightarrow (|a|^2)' = 2\vec{a}' \cdot \vec{a} = 0.$$

*Le vecteur dérivée première $\vec{a}'$ d'un vecteur $\vec{a}$, de norme constante, lui est orthogonal : c'est en particulier vrai pour tout vecteur unitaire $\vec{u}\,(|u| = 1)$.*

2° Soit $\vec{a} = a\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire; $\vec{a}' = a'\vec{u} + a\vec{u}'$ peut s'écrire : $\vec{a}' = \vec{a}'_{/\!/} + \vec{a}'_{\perp}$, avec :

$\vec{a}'_{/\!/} = a'\vec{u}$, vecteur colinéaire de $\vec{u}$ donc de $\vec{a}$,

$\vec{a}'_{\perp} = a\vec{u}'$, vecteur colinéaire de $\vec{u}'$, vecteur dérivée de $\vec{u}$ donc orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

*Le vecteur dérivée première $\vec{a}'$ d'un vecteur $\vec{a}$ est donc en général non colinéaire de $\vec{a}$.*

# 2

# CINÉMATIQUE

La *cinématique* se propose de décrire le mouvement (relatif) des particules ou systèmes de particules indépendamment des forces qui mesurent les interactions responsables du mouvement. Cette description s'appuie sur la structure de *l'espace euclidien* (0; $\mathcal{E}$) muni de *repères* et sur la notion de *temps* dont les propriétés restent à préciser.

## 1. LES REPÈRES EN MÉCANIQUE

Parmi tous les *repères* ou *référentiels* que le physicien utilise dans l'étude du mouvement d'une particule, il en existe trois privilégiés car très employés :

### 1.1 Le référentiel Terre

Au voisinage de la surface terrestre, les mouvements d'un corps peuvent être décrits dans le référentiel naturel qu'est la Terre elle-même. La figure 2.1 précise comment on peut définir deux référentiels de ce type :

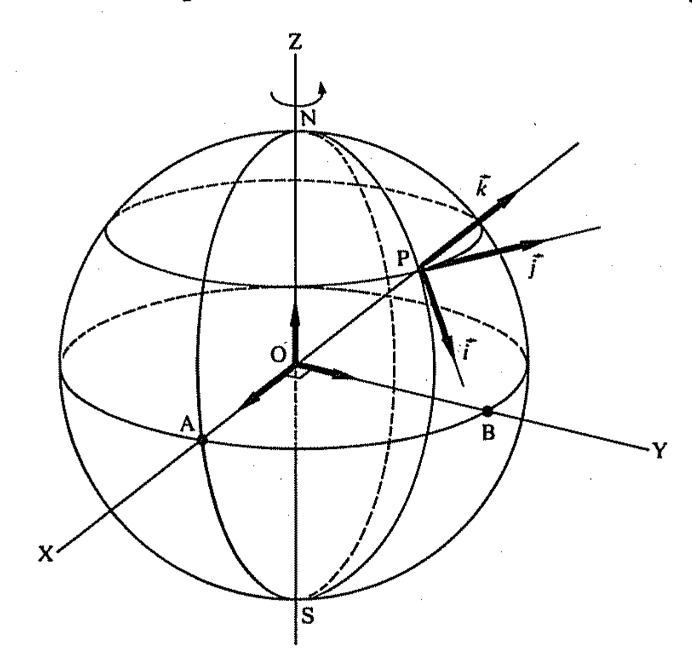



FIG. 2.1.

*a*) O : centre de la Terre, NS : axe nord-sud de rotation terrestre, (OA, OB) rayons terrestres orthogonaux du plan équatorial : (O; X, Y, Z) référentiel lié à la Terre.

*b*) OP : rayon terrestre, $\vec{k}$ vecteur unitaire dirigé selon la verticale en P, $\vec{i}$ vecteur unitaire tangent en P au méridien, $\vec{j}$ vecteur unitaire tangent en P au parallèle : $(P; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère local lié à la Terre appelé souvent *référentiel du laboratoire.*

*Tous ces référentiels effectuent une rotation autour de l'axe* NS *en 24 heures.*

## 1.2 Le référentiel Terre-étoiles fixes

La rotation diurne de la Terre complique, à long terme, la description cinématique d'une particule. Pour une expérience de durée $\Delta t$ faible devant la période de révolution de la Terre autour du Soleil ( ~ 365 jours), on prendra de préférence le repère constitué (fig. 2.2) par :
— la Terre considérée comme particule, c'est-à-dire concentrée à l'origine T,
— trois axes T$x$, T$y$, T$z$, issus de T et pointant vers trois étoiles dites fixes de la sphère céleste.

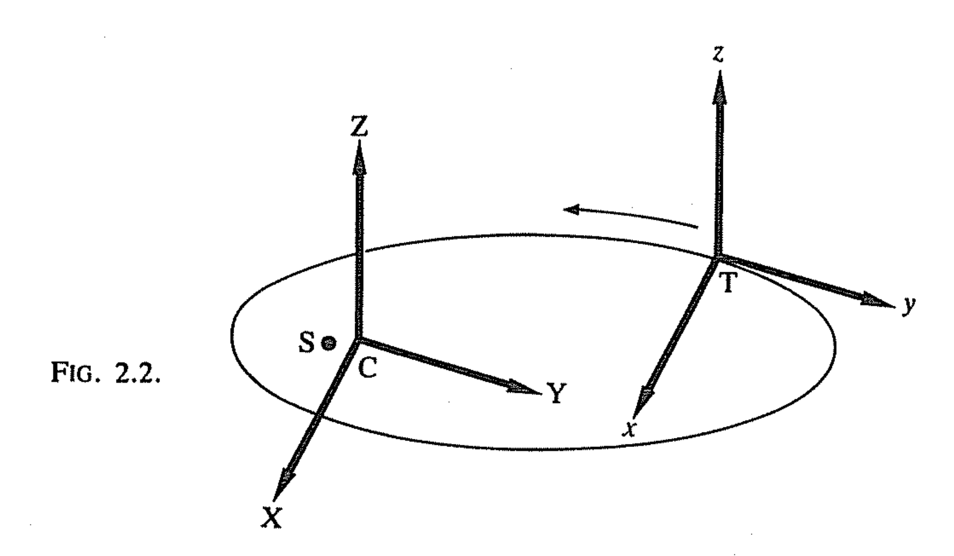



FIG. 2.2.

## 1.3 Le référentiel de Copernic

Pour de longues durées d'observation, le référentiel (T; $x$, $y$, $z$) ne peut être considéré ni comme fixe, ni comme animé d'un mouvement de translation rectiligne puisque T décrit une ellipse autour du Soleil S. Les étoiles fixes étant très éloignées du système solaire, celui-ci est donc un système isolé mécaniquement du reste de l'Univers et décrit dans (O; $\mathcal{E}$) une droite d'un mouvement uniforme (voir chapitre 3) : en prenant le centre de masse C du système — voisin de S — comme origine et en visant les trois étoiles du § 1.2 on obtient le référentiel dit de Copernic (C; X, Y, Z), excellente approximation de ce que l'on appellera *référentiel galiléen* (§ 11).

## 2. LE TEMPS

On ne peut définir le temps, la seule chose que l'on sache faire à son sujet étant de lier son écoulement à un ou plusieurs phénomènes physiques répétitifs appelés *horloges* (pendule simple, ressort à spirale, sablier, métronome, etc.). Si on fait correspondre chaque état d'une horloge à un point T d'une droite orientée (D) — point qui définit un *instant* — la figure 2.3 montre que *l'ensemble des instants* (T) est muni d'une *relation d'ordre total*.

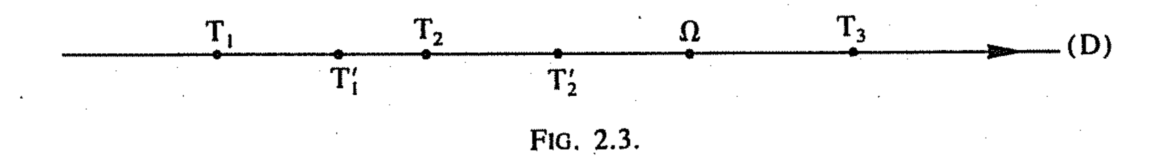



FIG. 2.3.

Sur (D) considérons deux instants $T_1$ et $T_2$, $T_2$ étant ultérieur à $T_1$ : nous obtenons le *bi-instant* $(T_1, T_2)$; $(T'_1, T'_2)$ est un bi-instant équipollent à $(T_1, T_2)$ si $T'_2 - T'_1 = T_2 - T_1$. Nous appellerons *durée t* ou intervalle de temps le vecteur classe d'équivalence des bi-instants équipollents à $(T_1, T_2)$; alors qu'il n'est pas possible d'additionner des instants (14 juillet 1789 et 11 novembre 1918), l'addition des durées a un sens (une expérience durant 11 secondes suivie d'une autre s'étendant sur 25 secondes a, au total, duré $(25 + 11) = 36$ secondes).

*Les durées ont une structure d'espace vectoriel.* Si de plus, sur la droite (D), on choisit un instant particulier comme origine $\Omega$ (ex. naissance du Christ), à tout instant T sera associé sa durée *t*, vecteur équivalent du bi-instant $(\Omega, T)$ : cette durée prend le nom de *date* relativement à $\Omega$ et l'espace $(\Omega; D)$ a, pour le temps, la même structure que l'espace physique $(O; \mathcal{E})$.

## 3. LES UNITÉS FONDAMENTALES DE MESURE EN CINÉMATIQUE

La définition d'une norme sur l'espace de la physique implique la mesure des grandeurs (scalaires ou vectorielles) de cet espace relativement à une grandeur de même type prise comme référence ou *unité* : si $\vec{U}$ et $\vec{i}$ appartiennent à l'espace euclidien $\mathcal{E}^1$, la relation $\vec{U} = U\vec{i}$ implique que le vecteur $\vec{U}$ contient U fois le vecteur-unité $\vec{i}$, résultat que l'on peut exprimer aussi sous la forme : $\|\vec{U}\| = |U|$.

Dans le *Système International* d'unités (SI), on a ainsi défini, en ce qui concerne les *unités fondamentales* de la cinématique :

— le mètre (m), *unité de longueur*, pour mesurer les *déplacements* : c'est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation correspondant à une certaine transition de l'atome de krypton 86.

Les sous-multiples et multiples courants du mètre sont : le kilomètre (km) : $10^3$ m, le centimètre (cm) : $10^{-2}$ m, le millimètre (mm) : $10^{-3}$ m, le micron ($\mu$m) : $10^{-6}$ m, le nanomètre (nm) : $10^{-9}$ m, l'angström (Å) : $10^{-10}$ m.

— La seconde (s), *unité de temps*, pour mesurer les *durées* : c'est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'atome de césium 133 dans son état fondamental.

Les sous-multiples et multiples courants de la seconde sont : la nanoseconde (ns) : $10^{-9}$ s, la microseconde ($\mu$s) : $10^{-6}$ s, la milliseconde (ms) : $10^{-3}$ s, la minute (mn) : 60 s, l'heure (h) = 3 600 s, le jour (j) = 86 400 s.

## 4. UNITÉS DÉRIVÉES ET ÉQUATIONS AUX DIMENSIONS

Nous rencontrerons ultérieurement des *unités dérivées* qui se déduisent des unités fondamentales par des relations posées a priori. Par exemple, la vitesse moyenne est le quotient de la distance parcourue par l'intervalle de temps mis pour le parcourir : $v = l/t$; on prend donc comme unité de vitesse celle qui consiste à parcourir l'unité de longueur pendant l'unité de temps. L'équation de définition correspondante s'écrit : vitesse = déplacement/durée ou symboliquement : $[v] = [L]/[T] = [L][T]^{-1}$. Une relation de cette forme est appelée *équation aux dimensions* de l'unité dérivée.

Dans le *Système International* d'unités (SI), la plupart des grandeurs physiques et les unités correspondantes ont une équation aux dimensions de la forme :

$$[G] = [M]^{\alpha}[L]^{\beta}[T]^{\gamma}[I]^{\delta},$$

où [M] représente la masse, [L] la longueur, [T] le temps, [I] le courant électrique et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ des nombres algébriques généralement entiers.

*Exemples :* • force $[F] = [M][L][T]^{-2}$;
• charge électrique $[q] = [I][T]$.

Remarquons que *l'équation aux dimensions d'une unité dérivée n'est pas une propriété intrinsèque de cette unité :* elle dépend du choix des unités fondamentales et de la relation choisie pour définir l'unité dérivée.

## 5. LES DESCRIPTIONS ÉQUIVALENTES D'UN MOUVEMENT EN CINÉMATIQUE

Soit *l'espace euclidien* (O; $\mathcal{E}$) *muni d'un repère orthonormé* R = (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Dans cet espace, il existe trois manières équivalentes pour décrire la cinématique d'une particule P :

### 5.1 On connaît la trajectoire (C) décrite par P dans le repère et la façon dont la particule se déplace sur (C) (fig. 2.4).

La trajectoire (C), lieu des points par lesquels passe P aux différents instants $t$, est définie par une application dans $\mathcal{E}$ :

*Exemple :* $y - x\, tg(z/b) = 0$ et $x^2 + y^2 = a^2$, $(a, b > 0)$.

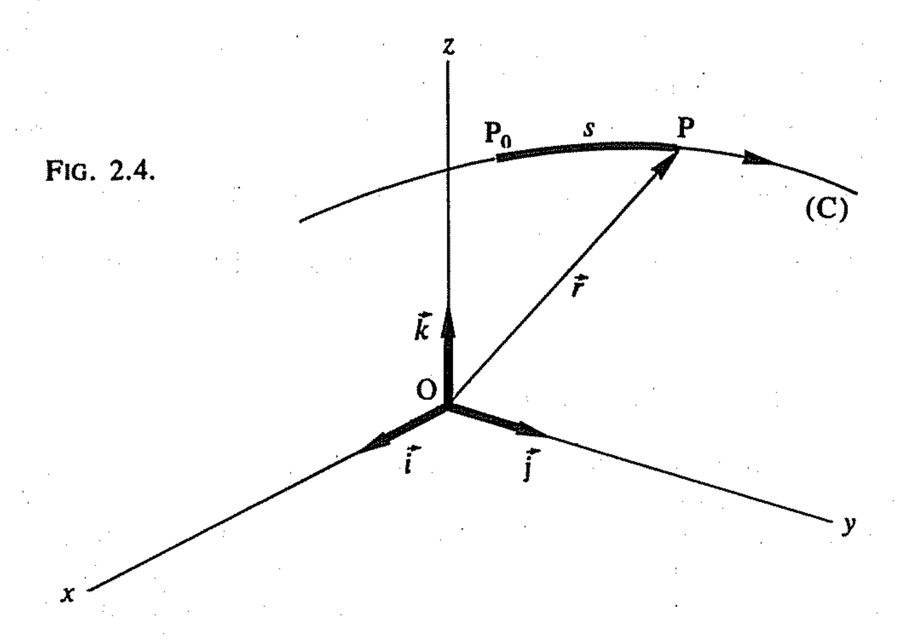



FIG. 2.4.

*La trajectoire* (C) *étant orientée*, le comportement de P est précisé par son *abscisse curviligne* ou *équation horaire*, mesure algébrique du déplacement de P sur la trajectoire, à partir d'une origine arbitraire $P_0$, exprimée en fonction du temps $t$ :

$$\widehat{P_0P} = s = s(t).$$

*Exemple :* $s = \sqrt{a^2 + b^2}\, \omega_0 t.$

### 5.2 On connaît le vecteur-position $\overrightarrow{OP}$ en fonction du temps

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \vec{r}(t).$$

Le lieu décrit par l'extrémité libre P de $\vec{r}$ est la trajectoire (C) et la dépendance de $\vec{r}$ par rapport à $t$ est équivalente à la connaissance de l'équation horaire.

*Exemple :* $\vec{r} = a \cos \omega_0 t\, \vec{i} + a \sin \omega_0 t\, \vec{j} + b\omega_0 t\, \vec{k}$, $(a, b > 0)$.

### 5.3 On connaît les équations, paramétrées par le temps, des coordonnées du point P dans le repère, c'est-à-dire :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Comme : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, l'équivalence est établie.

*Exemple :* $x = a \cos \omega_0 t, \quad y = a \sin \omega_0 t, \quad z = b\omega_0 t$, $(a, b > 0)$.

*Remarque :* les exemples ci-dessus décrivent tous le comportement d'une particule parcourant d'un mouvement uniforme une hélice construite sur un cylindre, d'axe de révolution Oz, de rayon $a$, et dont le pas vaut $2\pi b$ (cf. § 9.2).

Considérons maintenant les deux vecteurs $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, $\overrightarrow{OP'} = \vec{r}\,'$, positions de P aux instants respectifs $t$ et $t + \Delta t$ (fig. 2.5).

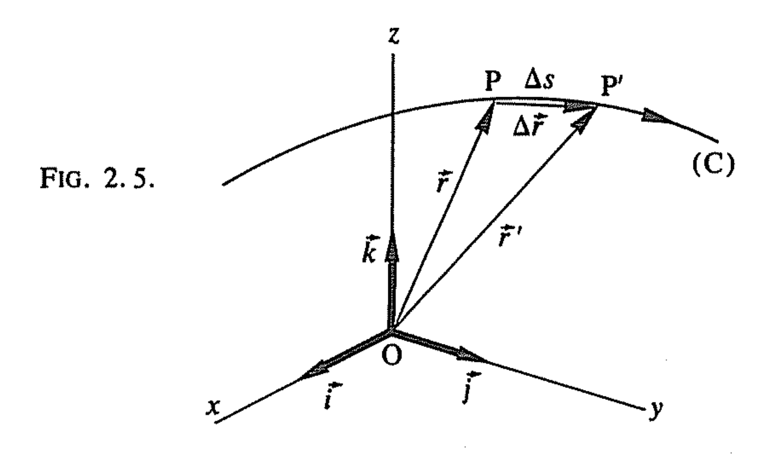



FIG. 2.5.

Si $\Delta\vec{r}$ et $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ représentent respectivement les accroissements de $\vec{r}$ et de $(x, y, z)$, on peut aussi écrire :

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = \vec{r}\,' - \vec{r} = \Delta\vec{r},$$

avec de plus :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$
$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\,\vec{k}.$$

Munissons le déplacement élémentaire $\Delta\vec{r}$ d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ dont le support $(\Delta)$ possède la même orientation que celle de (C) dans le repère; on aura ainsi : $\Delta\vec{r} = \Delta r\vec{u}$, avec $\Delta r > 0$ si $\overset{\frown}{PP'} = \Delta s = s' - s > 0$, $\Delta r < 0$ si $\Delta s < 0$.

Considérons maintenant la suite des positions $(P'_1, P'_2, \ldots)$ de la particule P' se rapprochant de P (fig. 2.6). Il y correspond deux suites :

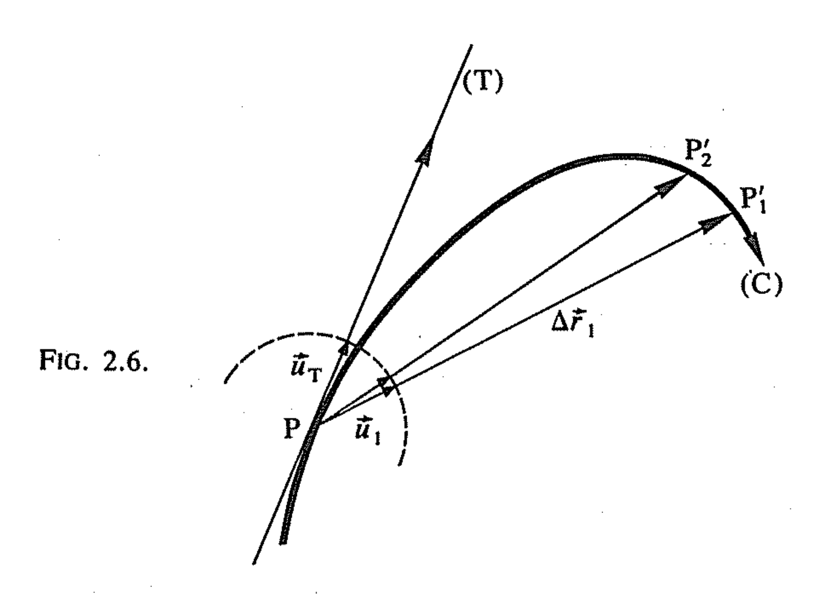



FIG. 2.6.

— celle des déplacements vectoriels : $\Delta\vec{r}_1 = \Delta r_1\vec{u}_1$, $\Delta\vec{r}_2 = \Delta r_2\vec{u}_2$, ...
— celle des déplacements curvilignes : $\Delta s_1 = s'_1 - s$, $\Delta s_2 = s'_2 - s$, ...
dont les mesures algébriques respectives $\Delta r$ et $\Delta s$ tendent simultanément vers O quand $P' \longrightarrow P$.

A la limite, on aura les deux propriétés évidentes géométriquement :

— $\Delta r_1 < \Delta s_1$, $\Delta r_2 < \Delta s_2$, ... mais $\lim\limits_{\Delta s = 0} \left(\dfrac{\Delta r}{\Delta s}\right) = 1$;

— $\vec{u}_1$ porté par $PP'_1$, $\vec{u}_2$ porté par $PP'_2$, ... tendent, quand $P' \longrightarrow P$, vers le *vecteur unitaire* $\vec{u}_T$ *porté par la tangente* (T) *en* P *à la courbe* (C).

Au total :

$$\boxed{\lim_{\Delta s = 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right) = \vec{u}_T.} \tag{2.1}$$

# 6. LA VITESSE

Dans toute la suite de l'ouvrage, les dérivées par rapport au temps $t$, d'applications seront toujours représentées par la fonction que l'on dérive surmontée d'un point pour une dérivation première : $\dot{a}$, $\dot{\vec{v}}$, de deux points pour une dérivée seconde : $\ddot{s}$, $\ddot{\vec{i}}$, etc.

## 6.1 Vitesse moyenne

Par définition, la *vitesse moyenne* de la particule est :

$$\boxed{\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}.}$$

C'est un vecteur lié à P et colinéaire de $\overrightarrow{PP'} = \Delta \vec{r}$.

## 6.2 Vitesse (instantanée)

Par définition, la *vitesse (instantanée)* est la limite (si elle existe) de $\vec{v}_{moy}$ quand $\Delta t \longrightarrow 0$, c'est-à-dire quand également $P' \longrightarrow P$, $\Delta \vec{r} \longrightarrow \vec{0}$, $\Delta s \longrightarrow 0$. Si l'application vectorielle $\vec{r}(t)$ est différentiable par rapport à $t$, cette limite existe et est la dérivée $\dot{\vec{r}}(t)$. On a donc :

$$\boxed{\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.} \tag{2.2}$$

Par construction, $\vec{v}$ *est un vecteur lié à* P, *tangent en* P *à la trajectoire* (C), de composantes $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ sur R et de norme :

$$|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

On peut encore écrire :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t = 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t = 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t = 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \lim_{\Delta s = 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right).$$

Si $\vec{r}(t)$ est différentiable, il en est de même pour $s(t)$ et, compte tenu de (2.1) : $\vec{v} = \dot{s}\vec{u}_T$; $\vec{u}_T$ étant le vecteur unitaire de la tangente, il est possible d'écrire : $\vec{v} = v\vec{u}_T$ où $v$ est la vitesse algébrique de P; alors :

$$\boxed{\vec{v} = v\vec{u}_T = \dot{s}\vec{u}_T.} \tag{2.3}$$

Le résultat (2.3) précise l'orientation de $\vec{v}$ par rapport à $\vec{u}_T$.

### 6.3 Unité de vitesse

L'équation aux dimensions de la vitesse est $[v] = [L][T]^{-1}$ et l'unité (SI) est le mètre par seconde ($m \cdot s^{-1}$).

## 7. L'ACCÉLÉRATION

### 7.1 Accélération moyenne

Soient P et P' deux points de (C) où la particule passe respectivement aux instants $t$ et $t + \Delta t$, $\vec{v}$ et $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ les vitesses correspondantes (fig. 2.7). Translatons, parallèlement à lui-même, le vecteur $\vec{v}'$ en P : l'accroissement de $\vec{v}$ durant l'intervalle $\Delta t$ est représenté par $\Delta\vec{v}$, avec $\Delta\vec{v} = \Delta v_x\vec{i} + \Delta v_y\vec{j} + \Delta v_z\vec{k}$, si on appelle $\Delta v_x$, $\Delta v_y$, $\Delta v_z$ les accroissements correspondants des composantes $v_x$, $v_y$, $v_z$ de $\vec{v}$ sur R.

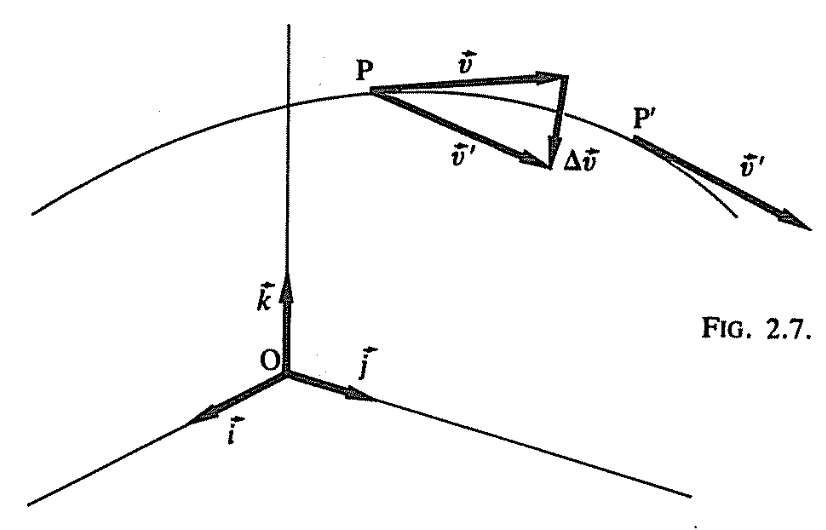



FIG. 2.7.

Par définition, *l'accélération moyenne* est :

$$\vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{k}.$$

C'est un *vecteur lié* à P, colinéaire de $\Delta\vec{v}$.

### 7.2 Accélération (instantanée)

L'*accélération* (instantanée) est définie par :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t = 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right) = \dot{\vec{v}},$$

soit :

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \quad (2.4)$$

C'est un *vecteur lié à* P, de composantes ($\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$) sur R et de norme : $|a| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$; comme on voit, sur la figure 2.7, que la vitesse $\vec{v}$

change de direction quand (C) s'incurve, *l'accélération $\vec{a}$ est de plus un vecteur toujours dirigé* vers l'intérieur de la trajectoire, c'est-à-dire *vers la concavité de* (C).

### 7.3 Accélérations normale et tangentielle

Considérons deux points $P_1$ et $P'_1$ de part et d'autre du point P, tous trois sur la trajectoire curviligne (C) *non obligatoirement plane* (fig. 2.8). Par P, $P_1$ et $P'_1$ nous pouvons faire passer le cercle $(\Omega_1, \rho_1)$, de centre $\Omega_1$ et de rayon $\rho_1 = \Omega_1 P$. Par P, $P_2$ et $P'_2$ milieux respectifs des arcs $\widehat{PP}_1$ et $\widehat{PP}'_1$ passe le cercle $(\Omega_2, \rho_2)$. La construction se poursuivra, alors que les suites $(P_1, P_2, \ldots)$ et $(P'_1, P'_2, \ldots)$ convergent indépendamment vers P. On peut montrer qu'à la limite :

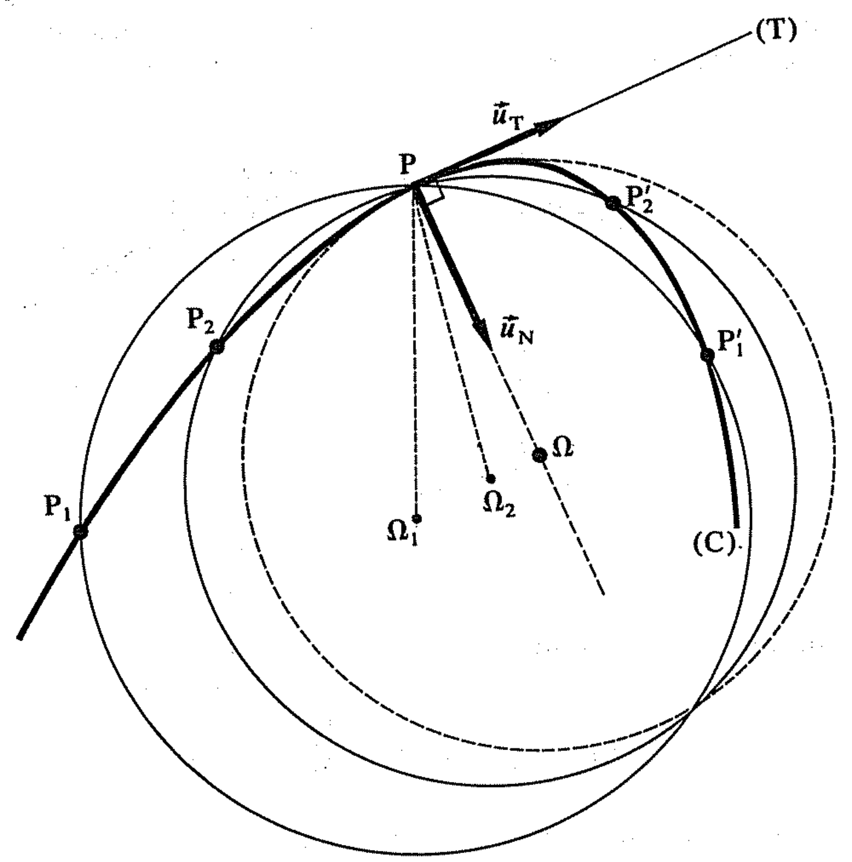



FIG. 2.8.

1° il existe un cercle tangent en P à (C) appelé *cercle osculateur* de centre Ω et de rayon $\rho = \Omega P$, toujours situé dans la concavité de (C);

2° la droite (N) de ce cercle portée par P et Ω, dite *normale principale*, est perpendiculaire en P à la tangente (T) commune au cercle osculateur et à la trajectoire (C);

3° si $\vec{u}_N$ désigne le vecteur unitaire (N), orienté vers la concavité, on a pour expression de la dérivée de $\vec{u}_T$ par rapport à $s$ :

$$\vec{u}'_T(s) = \frac{1}{\rho}\, \vec{u}_N. \qquad (2.5)$$

Soit $\vec{v} = v\vec{u}_T$; par dérivation par rapport au temps, nous obtenons :

$\dot{\vec{v}} = \vec{a} = \dot{v}\vec{u}_T + v\dot{\vec{u}}_T$; si nous considérons $\vec{u}_T$ comme une application de $t$ par l'intermédiaire de $s(t)$, nous avons aussi : $\dot{\vec{u}}_T = \vec{u}_T'(s)\dot{s}(t) = v\vec{u}_T'(s) = (v/\rho)\vec{u}_N$ en tenant compte de (2.3 et 5).
Finalement :

$$\boxed{\vec{a} = \dot{v}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N.} \tag{2.6}$$

L'accélération $\vec{a}$ est donc contenue dans le plan osculateur $(\Omega, \rho)$ et apparaît comme la somme vectorielle d'une accélération tangentielle $\vec{a}_T$ (portée par (T)) et d'une accélération normale $\vec{a}_N$ (portée par (N)) (fig. 2.9) avec :

$$\boxed{\vec{a}_T = \dot{v}\vec{u}_T, \quad a_T = \dot{v} = \ddot{s}, \quad \vec{a}_N = \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N, \quad a_N = \frac{v^2}{\rho} \geqslant 0.} \tag{2.7}$$

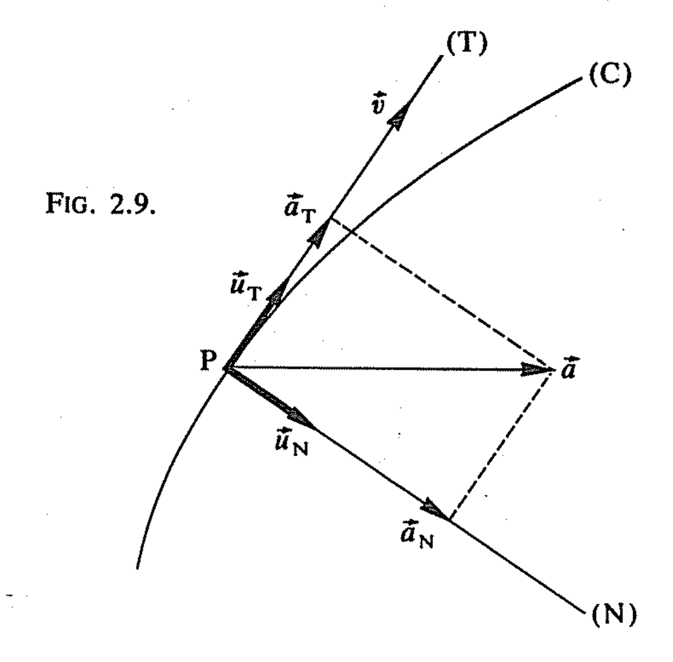



FIG. 2.9.

### 7.4 Unité d'accélération

L'équation aux dimensions de l'accélération est $[a] = [L][T]^{-2}$ et son unité (SI) est le mètre par seconde au carré $(m \cdot s^{-2})$.

## 8. VITESSE ET ACCÉLÉRATION ANGULAIRES

### 8.1 Définitions

Considérons un mouvement curviligne dans un plan $(\pi)$ muni d'un référentiel orthonormé $(\Omega; \vec{i}', \vec{j}')$ (fig. 2.10). La position de P sur (C) peut être repérée par les coordonnées polaires $(\rho, \theta)$, avec $\rho = \|\overrightarrow{OP}\|$ et $\theta = (\vec{i}', \overrightarrow{OP})$, angle orienté; $(\rho, \theta)$ sont en général des fonctions de $t$.

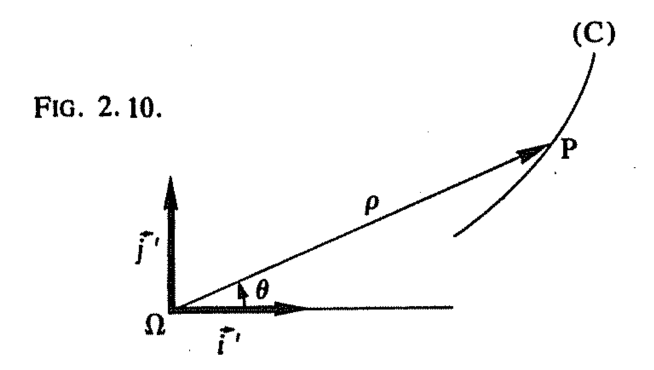



FIG. 2.10.

Par définition, on appelle *vitesse angulaire* $\omega$ de P la dérivée $\dot{\theta}$ de $\theta$ par rapport au temps, et *accélération angulaire* $\alpha$, la dérivée $\dot{\omega}$ de $\omega$ :

$$\boxed{\omega = \dot{\theta}, \quad \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}.} \tag{2.8}$$

## 8.2 Cas d'un mouvement circulaire

Soit le cas particulier où la courbe plane (C) contenue dans $(\pi)$ est un cercle de rayon R : prenons $\Omega$, centre du cercle (C), comme origine du vecteur-position $\vec{r}$ de P : $\rho = R = \|\vec{r}\| = C^{te}$ (fig. 2.11). Un point $P_0$ sur (C) définit l'origine de l'angle $\theta = (\widehat{\Omega P_0, \Omega P})$ et de l'abscisse curviligne $s = \widehat{P_0P}$. On aura :

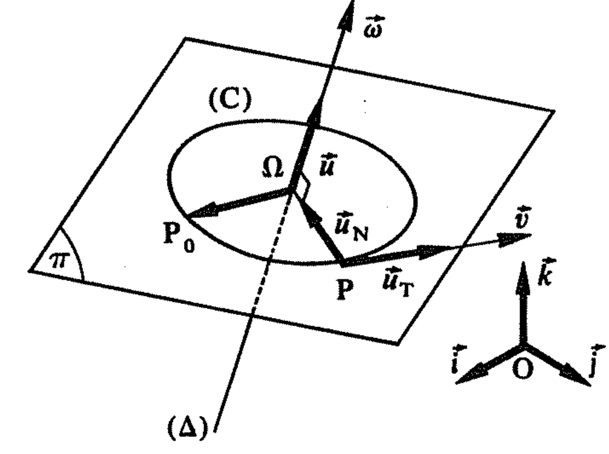



FIG. 2.11.

$$s = R\theta, \quad v = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega, \quad a_T = \dot{v} = R\dot{\omega} = R\alpha, \quad a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R;$$

$$\boxed{s = R\theta, \quad v = R\omega, \quad a_T = R\alpha, \quad a_N = \omega^2 R, \quad (R = C^{te}).} \tag{2.9}$$

Par définition le *vecteur vitesse angulaire* $\vec{\omega}(t)$ sera le vecteur libre, de support (Δ) droite orthogonale à $(\pi)$, de norme $|\dot{\theta}|$ et tel que la base $(\overrightarrow{\Omega P_0}, \overrightarrow{\Omega P}, \vec{\omega})$ oriente l'espace comme $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : *la direction de* $\vec{\omega}$ *par rapport au plan* $(\pi)$ *de la trajectoire renseigne donc sur le sens de rotation de la particule.*

Comme : $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ et $\vec{\omega} \perp \vec{v}$, $\|\vec{v}\| = |v| = |\omega r| = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{\omega}\|$ il vient :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (\|\vec{r}\| = C^{te}).} \tag{2.10}$$

De plus :

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r});$$

soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire constant de $\vec{\omega}$ :

$$\vec{\omega} = \omega\vec{u} \longrightarrow \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{u} = \alpha\vec{u} \longrightarrow \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{r} = \mathrm{R}\alpha\vec{u}_\mathrm{T}$$

si $\vec{u}_\mathrm{T}$ est le vecteur unitaire de $\vec{v}$;
$\vec{\omega} \perp (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$ et $\vec{\omega} \perp \vec{r} \longrightarrow \|\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})\| = \omega^2\mathrm{R}$; la construction de ce vecteur impose de plus qu'il soit orienté comme $-\vec{r}$ c'est-à-dire toujours dirigé vers $\Omega$ selon $\vec{u}_\mathrm{N}$, finalement nous obtenons :

$$\boxed{\vec{a} = (\mathrm{R}\alpha)\vec{u}_\mathrm{T} + (\omega^2\mathrm{R})\vec{u}_\mathrm{N} \quad (\mathrm{R} = \mathrm{C^{te}});} \qquad (2.11)$$

$\vec{a}$ apparaît bien comme la somme vectorielle d'une accélération tangentielle $(\vec{a}_\mathrm{T} = \mathrm{R}\alpha\vec{u}_\mathrm{T})$ et d'une accélération *centripète* $(\vec{a}_\mathrm{N} = -\omega^2\vec{r})$.

### 8.3 Unités

$\omega$ a pour équation aux dimensions l'inverse d'un temps : $[\omega] = [\mathrm{T}]^{-1}$ et son unité (SI) est le radian/seconde ($\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$) ou la seconde$^{-1}$ ($\mathrm{s^{-1}}$) ou l'hertz (Hz). $\alpha$ est homogène à l'inverse d'un temps au carré : $[\alpha] = [\mathrm{T}]^{-2}$, et son unité (SI) est $\mathrm{rad \cdot s^{-2}}$ ou $\mathrm{s^{-2}}$ ou $\mathrm{Hz^2}$.

## 9. EXEMPLES DE MOUVEMENTS D'UNE PARTICULE

### 9.1 Mouvements uniforme, accéléré, retardé

Soit $|v|$ la norme de la vitesse de la particule. Par définition :
— si $|v|$ = constante, le mouvement est *uniforme*;
— si $|v|$ est une fonction croissante (resp. décroissante) de $t$, le mouvement est *accéléré* (resp. *retardé*).

Dérivons $|v|^2$ par rapport au temps :

$$\widehat{|v|^2}^{\bullet} = \widehat{\vec{v}' \cdot \vec{v}}^{\bullet} = 2\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = 2\vec{a} \cdot \vec{v}.$$

1° *Mouvement uniforme :* $|v| = \mathrm{C^{te}} \longrightarrow \widehat{|v|^2}^{\bullet} = 0 \implies \vec{a} \cdot \vec{v} = 0.$
Le vecteur accélération $\vec{a}$ est, à tout instant, orthogonal au vecteur vitesse; il s'ensuit que *l'accélération tangentielle* $\vec{a}_\mathrm{T} = \vec{0}$.

2° *Mouvement accéléré* (resp. *retardé*) : $\widehat{|v|^2}^{\bullet} = 2\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ (resp. $< 0$) $\longrightarrow |a||v|\cos(\vec{a}, \vec{v}) > 0$ (resp. $< 0$), c'est-à-dire $\cos(\vec{a}, \vec{v}) > 0$ (resp. $< 0$) : dans un mouvement accéléré (resp. retardé), l'accélération $\vec{a}$ et la vitesse $\vec{v}$ forment un angle aigu (resp. obtus). Si, de plus, $a_\mathrm{T} =$ *const.*, on dit que le *mouvement* est *uniformément varié* (accéléré ou retardé).

### 9.2 Mouvements rectiligne, circulaire, hélicoïdal, rectiligne sinusoïdal

1° *Mouvement rectiligne :* un mouvement est rectiligne si et seulement si sa trajectoire (C) est portée par une droite ($\Delta$) : le rayon de courbure $\rho$ de (C) est donc infini et son accélération normale $a_\mathrm{N} = v^2/\rho$ toujours nulle.

2° *Mouvement circulaire :* un mouvement est circulaire si et seulement si sa trajectoire est portée par un cercle (Ω, R) : alors $\rho = R$ implique l'ensemble des résultats (2.9, 10 et 11). De plus, *si le mouvement est uniforme*, on aura : $|v| =$ constante d'où $\omega = \omega_0 =$ constante et :

$$\vec{v} = R\omega_0\vec{u}_T, \quad \vec{a} = \omega_0^2 R\vec{u}_N, \quad (\omega_0 = C^{te}). \tag{2.12}$$

Pour $\omega_0 \neq 0$, le cercle entier est parcouru au bout d'un intervalle de temps T appelé *période* de révolution. Si la *fréquence* N représente le nombre de révolutions par unité de temps, on a : $N = 1/T$. Enfin, comme $|\omega_0|$ est la mesure de l'angle parcouru par unité de temps, pour une révolution de durée T cet angle vaut $2\pi$, d'où :

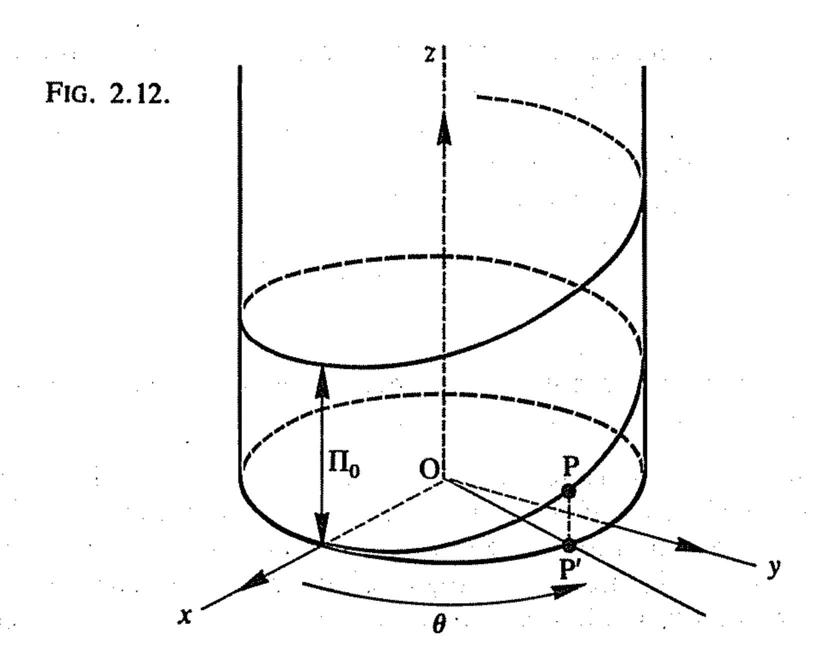
$$|\omega_0| = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N; \tag{2.13}$$

T se mesure en secondes (s) et N, comme $\omega_0$, en $s^{-1}$ ou Hz.

3° *Mouvement hélicoïdal :* un mouvement est dit hélicoïdal si sa trajectoire (C) est portée par une hélice circulaire (fig. 2.12) dont les équations paramétriques sur $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ peuvent être :

$$x = a \cos\theta \quad (a > 0),$$
$$y = a \sin\theta,$$
$$z = b\theta \quad (b \neq 0).$$

FIG. 2.12.




Le pas $\pi_o$ représente la translation de P parallèlement à Oz effectuée au cours d'une révolution :

$$\pi_0 = 2\pi|b|.$$

$\forall\theta(t)$, on aura :

$$|v| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} = \sqrt{a^2 + b^2}|\dot{\theta}|.$$

Comme $v$ a le signe de $\dot{\theta}$, ceci s'écrit encore : $v = \sqrt{a^2 + b^2}\dot{\theta}$ ; soit $ds = v\ dt$, $d\theta = \dot{\theta}\ dt$ les différentielles respectives de $s$ et $\theta$ : $ds = \sqrt{a^2 + b^2}\ d\theta$ s'intègre et si nous prenons $\theta = 0$, $s = 0$, $t = 0$ quand P est en $P_0$, on obtient : $s = \sqrt{a^2 + b^2}\theta$, relation liant le chemin parcouru sur (C) à l'angle de rotation autour de O$z$.

Le mouvement hélicoïdal est uniforme si $\omega = \dot{\theta} = \omega_0$ : dans ce cas $\theta = \omega_0 t$.

4° *Mouvement rectiligne sinusoïdal :* soit un point P décrivant le cercle (O, R $= s_0$) d'un mouvement uniforme à la vitesse angulaire $\omega_0$ (fig. 2.13); le mouvement de M, projection orthogonale de P sur la droite (O, Δ) faisant l'angle $\varphi$ avec l'axe O$x$, est un mouvement rectiligne sinusoïdal. En effet :

$$(\widehat{\Delta, \overrightarrow{OP}}) = (\widehat{\Delta, Ox}) + (\widehat{Ox, \overrightarrow{OP}}) = \omega_0 t - \varphi,$$

$$\overline{OM} = s = \|\overrightarrow{OP}\| \cos(\omega_0 t - \varphi),$$

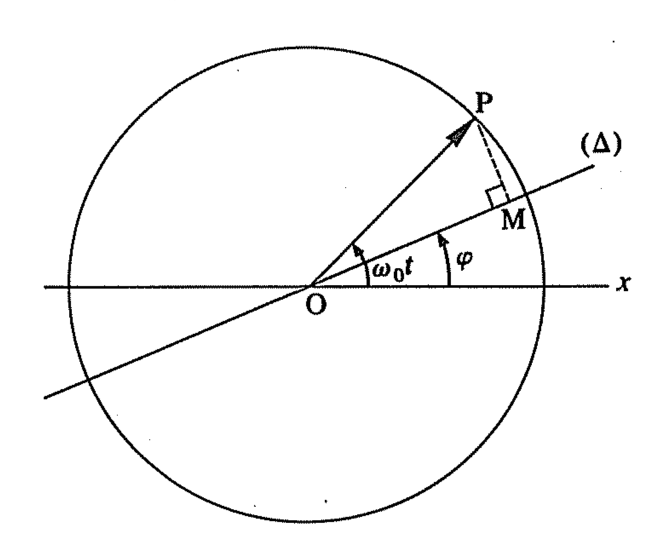



FIG. 2.13.

soit :

$$\boxed{\overline{OM} = s = s_0 \cos(\omega_0 t - \varphi),} \tag{2.14}$$

avec :

$$v = \dot{s} = -\omega_0 s_0 \sin(\omega_0 t - \varphi),$$

$$a = \ddot{s} = -\omega_0^2 s_0 \cos(\omega_0 t - \varphi) = -\omega_0^2 s.$$

L'abscisse $s$ du point M sur la droite d'oscillation vérifie donc l'équation différentielle homogène du deuxième ordre :

$$\boxed{\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0.} \tag{2.15}$$

La réciproque est vraie.

Soit $\ddot{s} + ks = 0$ avec $k > 0$. En posant $k = \omega_0^2$, on obtient l'équation (2.15) dont $s_1 = \cos \omega_0 t$ et $s_2 = \sin \omega_0 t$ sont des *solutions particulières ;* toute combinaison linéaire à coefficients A et B constants de ces *deux* solutions particulières est la *solution générale* de (2.15) :

$$s = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Posons :

$$A = s_0 \cos \varphi, \quad B = s_0 \sin \varphi \longrightarrow s_0^2 = A^2 + B^2, \quad \varphi = \text{arc tg}(B/A);$$

on a :

$$s = s_0(\cos \varphi \cos \omega_0 t + \sin \varphi \sin \omega_0 t) = s_0 \cos(\omega_0 t - \varphi),$$

c'est-à-dire (2.14).

## 10. MOUVEMENTS RELATIFS

Soient deux particules A et B vues par un observateur O immobile dans un repère R de l'espace (fig. 2.14). Par rapport à O, les particules A et B ont les vitesses respectives : $\vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A$, $\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B$. Nous définirons la *vitesse relative* $\vec{v}_{B/A}$ *de* B *par rapport à* A (resp. $\vec{v}_{A/B}$ de A *par rapport à* B) par :

$$\vec{v}_{B/A} = \dot{\vec{r}}_{B/A} (\text{resp. } \vec{v}_{A/B} = \dot{\vec{r}}_{A/B}),$$

où

$$\vec{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$
$$(\text{resp. } \vec{r}_{A/B} = \overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B).$$

Comme $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, on aura $\vec{r}_{A/B} = -\vec{r}_{B/A}$ et $\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A}$.

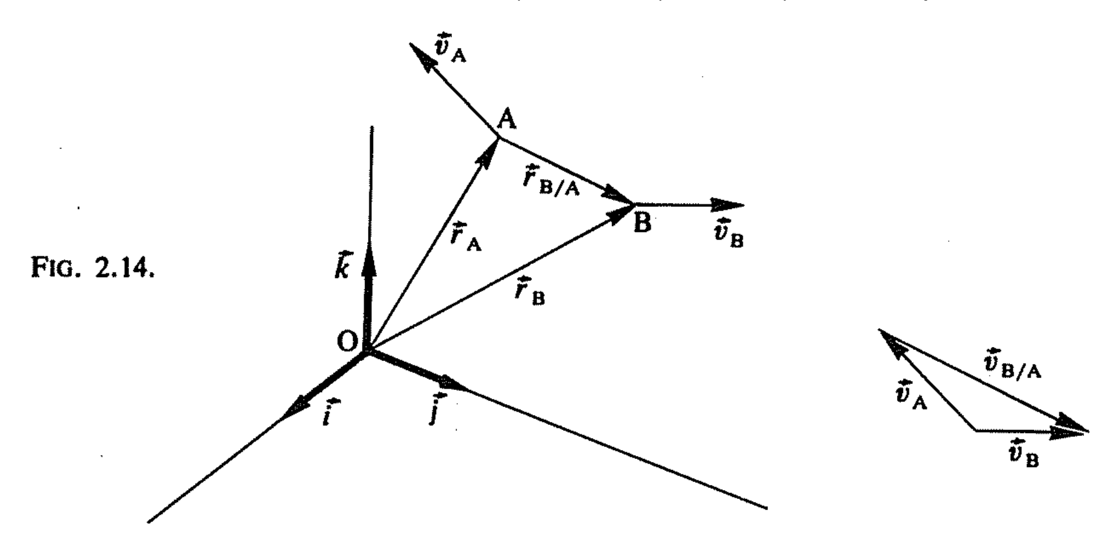


FIG. 2.14.

De $\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, il en résulte par dérivation par rapport au temps, $\dot{\vec{r}}_{B/A} = \vec{v}_{B/A} = \dot{\vec{r}}_B - \dot{\vec{r}}_A = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ $(\text{resp. } \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B)$.

La vitesse relative $\vec{v}_{B/A}$ de B par rapport à A est donc égale et opposée à la vitesse relative $\vec{v}_{A/B}$ de A par rapport à B. Pour obtenir ces vitesses relatives, il suffit de soustraire les vitesses respectives $\vec{v}_B$ et $\vec{v}_A$ (resp. $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$) mesurées par un même observateur :

$$\boxed{\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = -\vec{v}_{A/B}.} \tag{2.16}$$

Le raisonnement précédent s'applique aux vitesses et à leurs dérivées d'où le résultat pour les accélérations :

$$\boxed{\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = -\vec{a}_{A/B}.} \tag{2.17}$$

## 11. RÉFÉRENTIELS GALILÉENS

La discussion précédente semble donner une importance particulière au référentiel $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puisque les caractéristiques cinématiques relatives des particules A et B s'expriment en fonction de leurs caractéristiques respectives observées par O : on parle encore de *référentiel absolu* pour $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La recherche d'un tel référentiel absolu, *immobile dans l'espace* $\mathcal{E}$, a préoccupé les physiciens pendant de nombreuses années. Ce fut le grand mérite d'Einstein (1905) de montrer que ce problème était dépourvu de sens en énonçant son *principe de relativité*, que l'on peut formuler ainsi :

> « Toutes les lois de la physique sont les mêmes pour tous les observateurs en mouvement relatif de translation rectiligne uniforme ».

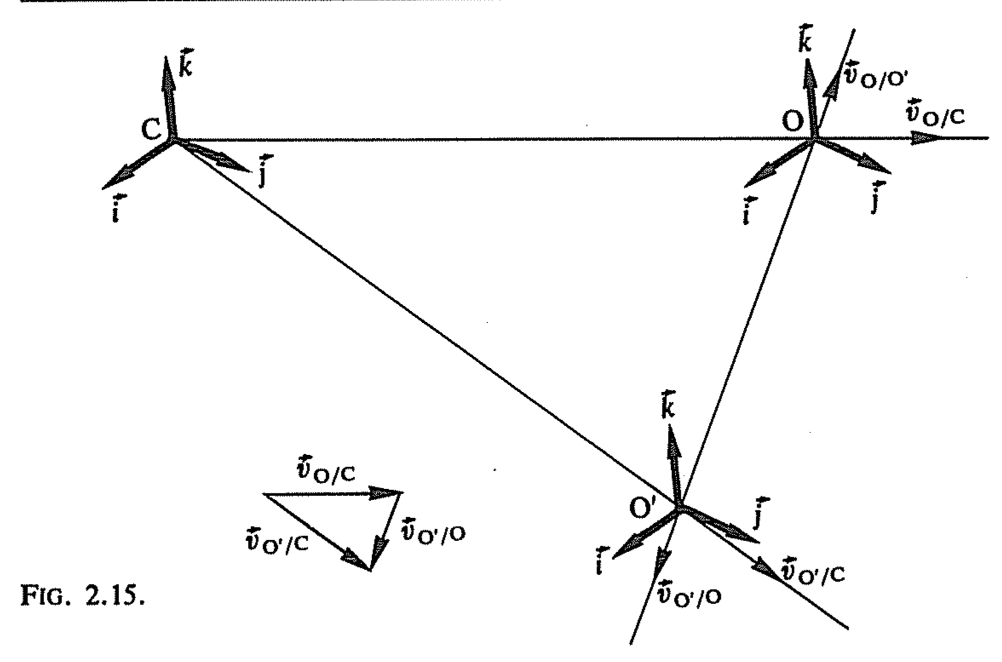



FIG. 2.15.

Or nous connaissons (§ 1.3) dans $\mathcal{E}$ un repère animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme, celui de Copernic $(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tout référentiel animé par rapport à $(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme satisfait au principe de relativité. Il en est de même pour deux référentiels de ce type en mouvement relatif : en effet (fig. 2.15), soient $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ deux référentiels qui se translatent rectilignement par rapport à C avec les vitesses relatives constantes $\vec{v}_{O/C}$ et $\vec{v}_{O'/C}$; comme $\vec{v}_{O'/O} = \vec{v}_{O'/C} - \vec{v}_{O/C} = \overrightarrow{\text{constant}}$, il en est bien ainsi pour le mouvement de O' par rapport à O et respectivement. *Nous appellerons référentiels galiléens tous les repères en mouvement relatif de translation rectiligne uniforme*, et le principe de relativité, appliqué à la mécanique, peut encore s'énoncer :

> Toutes les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens.

## 12. GROUPE DE TRANSFORMATION DE GALILÉE

Soient deux référentiels (O) et (O′) tel que $\vec{v}_{O'/O} = \vec{V} = \overrightarrow{\text{constant}}$ est porté par l'axe de translation O$x$ (fig. 2.16).

Comme il n'y a pas de rotation relative mais seulement translation, les axes correspondants restent parallèles quand (O′) se déplace par rapport à (O) avec la vitesse constante $\vec{V}$.

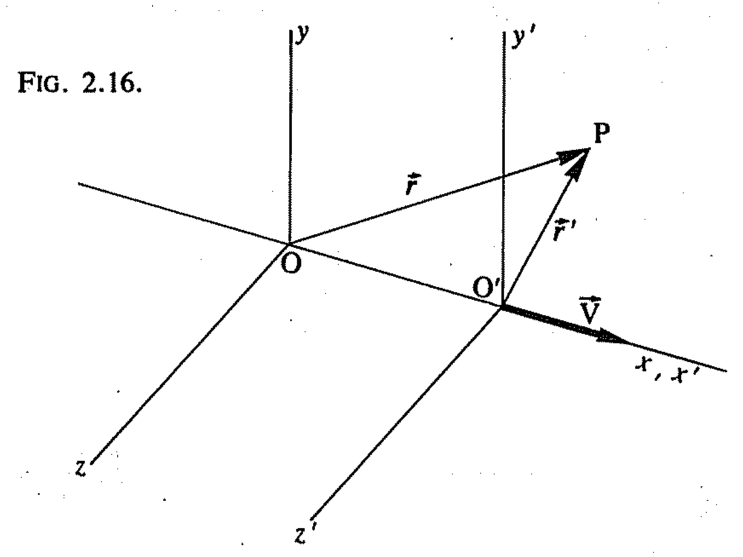



FIG. 2.16.

Supposons les observateurs munis chacun d'une horloge qu'ils déclenchent simultanément quand (O′) passe en (O) ($t_0 = t'_0 = 0$). De plus, faisons l'*hypothèse de l'invariance du temps*, c'est-à-dire que les horloges étant supposées identiques et mises en concordance, *à tout instant ultérieur* $t = t'$, le temps mesuré par chaque observateur dans son référentiel étant indépendant de son mouvement relatif. Cette hypothèse, quoique sensée, pourra éventuellement être infirmée par l'expérience.

Considérons une particule P de coordonnées ($x$, $y$, $z$) dans (O) et ($x'$, $y'$, $z'$) dans (O′). De : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, il résulte :

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t',} \tag{2.18}$$

$\vec{V}t'$ étant le déplacement de O′ par rapport à O à l'instant $t'$ d'observation de P par (O′). Il vient ainsi :

$$\boxed{x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t',} \tag{2.19, a}$$

et les relations inverses :

$$\boxed{x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.} \tag{2.19, b}$$

Les relations (2.19) constituent le *groupe de transformation de Galilée*.

Il est aisé de démontrer que l'existence de ce groupe implique l'existence dans l'espace euclidien (O; $\mathcal{E}$) d'un autre *invariant, la distance entre deux points mesurée simultanément par* (O) *et* (O′) : soient $P_1$ et $P_2$ ces deux points; pour (O), à l'instant $t$ :

$$d^2_{P_1P_2} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

et pour (O′) à l'instant $t' = t$ :

$$d'^2_{P_1P_2} = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2.$$

De : $x'_1 = x_1 - Vt$, $x'_2 = x_2 - Vt$, $y'_1 = y_1$, $y'_2 = y_2$, $z'_1 = z_1$, $z'_2 = z_2$, il découle :

$$d'^2_{P_1P_2} = d^2_{P_1P_2} \implies d'_{P_1P_2} = d_{P_1P_2}.$$

Dérivons enfin, par rapport au temps, la relation (2.18) :
— en dérivant une fois, on a en remarquant que $t = t'$ :

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\overline{(\vec{r}\,' + \vec{V}t')}}(t) = \dot{\vec{r}}\,'(t) + \dot{\widehat{\vec{V}t}} = \dot{\vec{r}}\,'(t') + \vec{V}.$$

Or $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}$ vitesse de P mesurée par (O), $\dot{\vec{r}}\,'(t') = \vec{v}\,'$ vitesse de P mesurée par (O′), chacun d'eux muni de son horloge. A cette transformation galiléenne des vecteurs vitesse :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V},} \qquad (2.20)$$

correspond la transformation des composantes correspondantes :

$$\boxed{\begin{matrix} v_x = v_{x'} + V, & v_y = v_{y'}, & v_z = v_{z'}, \\ v_{x'} = v_x - V, & v_{y'} = v_y, & v_{z'} = v_z\,; \end{matrix}} \qquad (2.21)$$

— en dérivant encore une fois, si nous tenons compte de $\dot{\vec{V}} = 0$, il vient :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,',} \qquad (2.22)$$

et les relations algébriques équivalentes :

$$\boxed{a_x = a_{x'}, \quad a_y = a_{y'}, \quad a_z = a_{z'}.} \qquad (2.23)$$

Les deux observateurs galiléens mesurent, au même moment, la même accélération : *l'accélération d'une particule est donc un invariant, car la même pour tous les référentiels galiléens.*

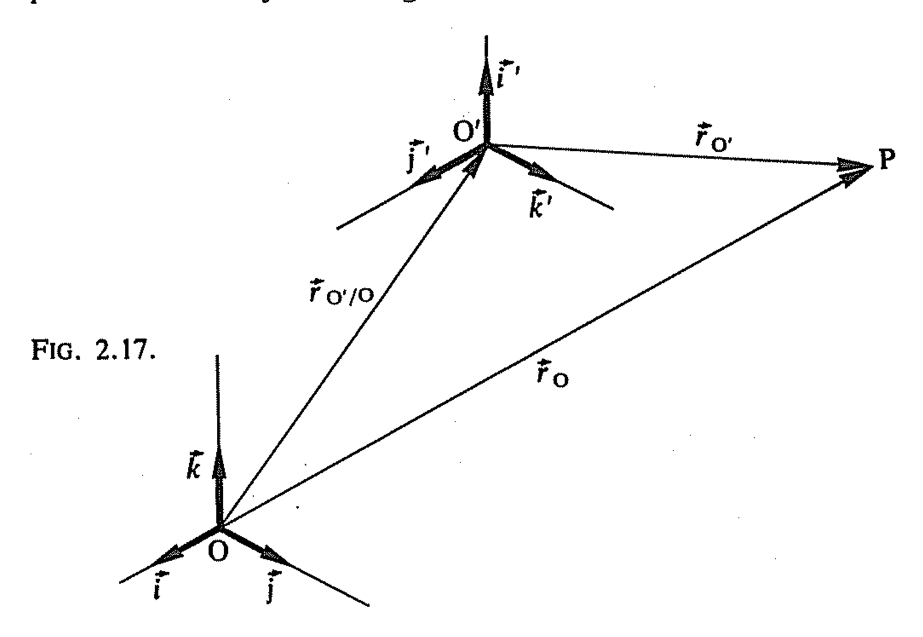



FIG. 2.17.

## 13. CHANGEMENT DE REPÈRES

Soit un *repère galiléen* $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un autre repère non obligatoirement galiléen $(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ dans lequel on étudie le comportement d'une particule P (fig. 2.17). On a : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, soit :

$$\vec{r}_O = \vec{r}_{O'/O} + \vec{r}_{O'},$$

et en dérivant :

$$\vec{v}_O = \vec{v}_{O'/O} + \vec{v}_{O'},$$
$$\vec{a}_O = \vec{a}_{O'/O} + \vec{a}_{O'}.$$

Par suite, les grandeurs cinématiques de P dans son référentiel $(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ sont reliées à celles que l'on observerait dans un autre référentiel galiléen par les relations :

$$\boxed{\vec{r}_{O'} = \vec{r}_O - \vec{r}_{O'/O}, \quad \vec{v}_{O'} = \vec{v}_O - \vec{v}_{O'/O}, \quad \vec{a}_{O'} = \vec{a}_O - \vec{a}_{O'/O},} \quad (2.24)$$

où $\vec{r}_{O'/O}$, $\vec{v}_{O'/O}$ et $\vec{a}_{O'/O}$ sont respectivement les vecteurs position, vitesse et accélération relatives de O' par rapport à O.

*Exemple.* Soit un enfant P sur un manège tournant $(Ox'y'z')$ à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_0$. Le cheval de bois C sur lequel P est assis oscille verticalement selon $Oz'$. La vitesse de P par rapport au manège (O') est $\vec{v}_{O'} = \vec{V}_z$ vitesse de translation du cheval parallèlement à $Oz$. La vitesse $\vec{v}_{O'/O}$ est la vitesse de rotation de (O') par rapport au trièdre galiléen fixe $(Oxyz)$, soit $\vec{v}_{O'/O} = \vec{\omega}_0 \wedge \overrightarrow{OC}$ puisque le cheval C est entraîné dans la rotation de (O'). Ainsi, la vitesse de P dans (O) vaut : $\vec{v}_O = \vec{V}_z + \vec{\omega}_0 \wedge \overrightarrow{OC}$. (Fig. 2.18.)

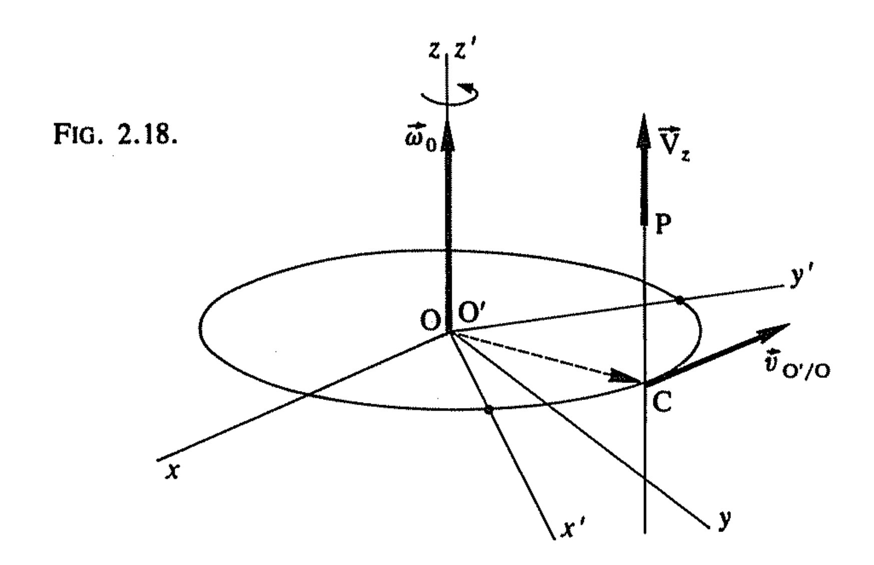



FIG. 2.18.

*Conséquences :* La terre tourne autour de l'axe N-S : elle ne peut être un référentiel galiléen et par suite $\vec{a}_O \neq \vec{a}_{O'}$; ceci implique des faits que l'expérience peut constater : variation de $g$ avec la latitude, mouvement tourbillonnaire des cyclones en sens contraire des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Nord, rotation du plan d'oscillation d'un pendule simple, etc.

# 3

# DYNAMIQUE D'UNE PARTICULE

## 1. REPÈRES D'INERTIE. MASSE ET QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Après avoir décrit en *cinématique* le mouvement d'une particule dans l'espace euclidien (O; $\mathcal{E}$) nous allons chercher les causes de ce mouvement. Établir des relations de cause à effet est l'objet de la *dynamique* : les causes seront les *interactions* de la particule avec le milieu qui l'entoure, leur intensité sera mesurée par une grandeur physique appelée *force*; quant aux effets, ils apparaîtront dans les variations du mouvement de la particule.

### 1.1 Référentiels d'inertie et repères galiléens

La description du comportement de la particule P, telle qu'elle apparaît dans la cinématique, suppose l'existence de repères (R) dans lesquels l'observateur (O) note ses observations : si l'on doit établir un lien causal univoque entre les interactions de $\mathcal{E}$ sur P et son mouvement, l'observateur (O) et les repères (R) ne doivent en aucun cas perturber la description de cette relation qui se fait grâce à eux; on dira, s'il en est ainsi, que (O) et (R) sont, respectivement, un *observateur d'inertie* et des *référentiels d'inertie*.

Or, nous avons vu (§ 12 du chap. 2) que parmi tous les référentiels de $\mathcal{E}$, les seuls dans lesquels l'accélération de P est la même, sont les *repères galiléens*, le passage des données cinématiques autres que $\vec{a}$ (c'est-à-dire $\vec{r}$ et $\vec{v}$) d'un repère à un autre de la même classe se faisant par l'intermédiaire du groupe de transformations de Galilée.

Nous identifierons, par conséquent, les référentiels d'inertie aux repères galiléens.

### 1.2 Masse d'inertie

Considérons une balance à bras égaux, c'est-à-dire une balance (fig. 3.1) qui soit, par construction, rigoureusement symétrique (OA = OA', plateaux P et P' identiques) et dont l'équilibre à vide est repéré par la position de l'aiguille immobile OΩ.

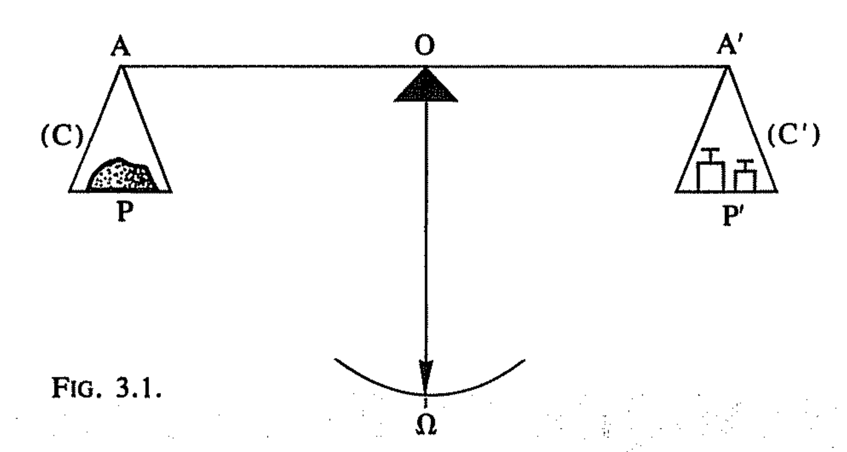



FIG. 3.1.

On dit que deux corps (C) et (C′) ont des masses $m$ et $m'$ égales si la balance reste identique à elle-même — c'est-à-dire n'a pas son équilibre à vide modifié — quand on met (C) et (C′) sur les plateaux respectifs P et P′. Cet équilibre, que l'expérience vérifie en tout lieu, donne donc une *définition opérationnelle de la masse d'inertie* (ou *au repos*), à partir de laquelle on peut choisir une unité de masse et construire ses multiples et sous-multiples.

L'équation aux dimensions de la masse s'écrit [M]. Par définition, l'unité fondamentale (SI) de masse est le *kilogramme* (kg), masse de $5{,}0188\ 10^{25}$ atomes de l'isotope $^{12}$C du carbone; pratiquement, c'est la masse d'un litre ($10^{-3}$ m$^3$) d'eau distillée à 4° C.

### 1.3 Quantité de mouvement

La masse d'inertie est un scalaire associé à une particule *au repos*. Rien dans la définition ne nous laisse préjuger de ce que devient ce scalaire si la particule est en mouvement, aussi supposerons-nous que *cette masse m est indépendante de l'état de mouvement de la particule.*

Par définition, la *quantité de mouvement* («momentum» en anglais) d'une particule P est le vecteur $\vec{p}$, lié à P, colinéaire de sa vitesse $\vec{v}$ et tel que :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}.} \tag{3.1}$$

Son équation aux dimensions s'écrit $[p] = [M][L][T]^{-1}$ et son unité (SI) est le m·kg·s$^{-1}$.

## 2. LOI D'INERTIE OU PREMIÈRE LOI DE NEWTON

Une *particule libre* est une particule de masse $m$, de vitesse $\vec{v}$, sans interaction avec les autres particules du monde qui l'entoure. En laboratoire, une telle particule peut être matérialisée par un palet en plastique susceptible de se déplacer sur une table soufflante, le matelas d'air qui s'interpose entre le palet et la table annulant les effets de frottement de la table : si on munit le mobile d'une petite lampe au néon émettant des éclairs périodiques de courte durée, l'enregistrement des

éclairs sur un film polaroïd, tant que dure le mouvement du palet, en permet ensuite l'étude cinématique. Une fois la particule lancée, son comportement en l'absence d'interaction, est décrit par la *première loi de Newton ou loi d'inertie.*

> Une particule libre se déplace toujours avec une quantité de mouvement $\vec{p}$ constante.

Compte tenu de la relation $\vec{p} = m\vec{v}$, il est équivalent de dire qu'une particule libre a toujours une vitesse $\vec{v}$ constante, c'est-à-dire pas d'accélération : $\vec{a} = \vec{0}$. Il en résulte qu'*une particule n'est pas libre si elle subit une accélération* (par exemple, si sa trajectoire est curviligne).

## 3. CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME ISOLÉ

Soient deux particules en interaction mutuelle et sans aucune interaction avec l'Univers qui les entoure : on parlera d'*un système isolé* (sous-entendu, de deux particules). Un tel système s'obtient en laboratoire avec deux palets sur une aérotable, chacun d'eux étant muni d'un petit aimant : à courtes distances, l'interaction magnétique mutuelle modifie les trajectoires respectives des palets (fig. 3.2).

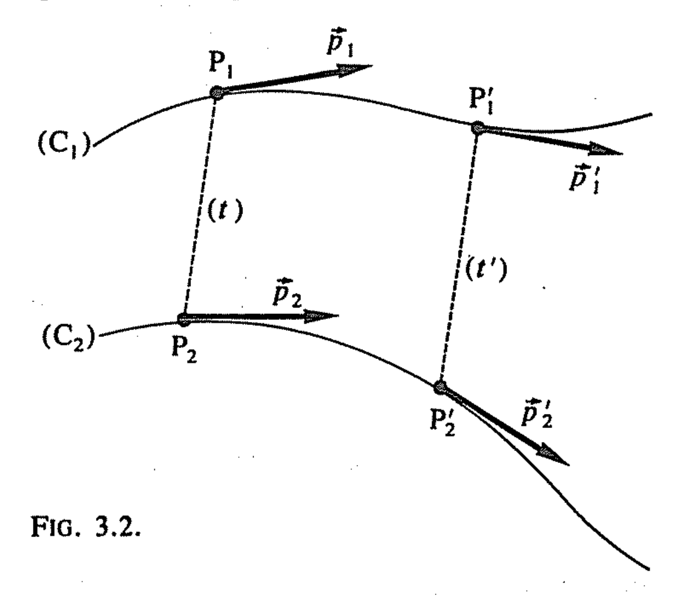



FIG. 3.2.

Soient $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ les quantités de mouvement des particules $P_1$ et $P_2$ à l'instant $t$, $\vec{p}\,'_1$, $\vec{p}\,'_2$ les vecteurs correspondants à l'instant ultérieur $t'$.

Définissons la *quantité de mouvement totale* à l'instant $t$, par :

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \sum_i \vec{p}_i.$$

A l'instant $t'$, cette quantité sera :

$$\vec{P}' = \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 = \sum_i \vec{p}\,'_i.$$

L'expérience montre alors : $\forall t$ et $\forall t'$, $\vec{P} = \vec{P}'$. Ce résultat est un cas particulier du *principe de conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé* qui s'énonce :

| |
|---|
| La quantité de mouvement totale d'un système isolé de particules est constante : $\forall t,\ \vec{P}(t) = \sum_i \vec{p}_i(t) = \vec{P}_0$, vecteur constant. |

*Ce principe ne préjuge en rien du nombre de particules qui peut varier dans le temps.* Par exemple, les palets (1) et (2) étant enduits de glu peuvent se rencontrer : avant le choc : $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$; après le choc, ils sont collés et $\vec{P} = \vec{p}' = (m_1 + m_2)\vec{v}'$.

Pour deux particules formant un système isolé, un énoncé équivalent du principe de conservation de la quantité de mouvement totale est le suivant : *une interaction se manifeste par un échange de quantité de mouvement.*

En effet, soit $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1$ la variation de quantité de mouvement de (1) sur l'intervalle de temps $\Delta t = t' - t$. Pour (2), on aura : $\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2$. De $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$, on tire : $\vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2)$ ce qui entraîne : $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$. On peut encore dire que la quantité de mouvement gagnée par une particule au cours de l'interaction a été perdue par l'autre.

Sous cette nouvelle forme, en supposant toujours que la masse $m$ d'une particule est indépendante de sa vitesse $\vec{v}$, on a les relations :

$$\Delta\vec{p}_1 = \Delta(m_1\vec{v}_1) = m_1\Delta\vec{v}_1 = -\Delta\vec{p}_2 = -\Delta(m_2\vec{v}_2) = -m_2\Delta\vec{v}_2,$$

et il en résulte :

$$m_2 = m_1 \frac{|\Delta v_1|}{|\Delta v_2|}.$$

Cette relation permet une *définition dynamique* de la masse équivalente à la *définition statique* du § 1.2 : en prenant $m_1$ comme unité de masse, la mesure du rapport des variations de vitesse conduit à la connaissance de $m_2$.

## 4. SECONDE LOI DE NEWTON : DÉFINITION DE LA NOTION DE FORCE

Considérons un système isolé de deux particules en interaction mutuelle; soient $\Delta\vec{p}_1$ et $\Delta\vec{p}_2$ les variations de leurs quantités de mouvement respectives $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$. Nous savons que, pour la durée $\Delta t$ de l'observation, $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$. Quand l'intervalle de temps $\Delta t \longrightarrow 0$, nous aurons :

$$\dot{\vec{P}}_1(t) = \lim_{\Delta t = 0} \left(\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t = 0} \left(-\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}\right) = -\dot{\vec{P}}_2(t). \qquad (3.2)$$

Par définition, nous appellerons *force* $\vec{F}$, *la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'une particule :*

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}(t) = \dot{\widehat{(m\vec{v})}}(t),} \qquad (3.3)$$

(3.3) constitue en fait l'énoncé de la *seconde loi de Newton;* on voit que la notion de force repose sur une *définition mathématique* qui, à l'application vectorielle $t \longrightarrow \vec{p}(t)$ fait correspondre une nouvelle application vectorielle $t \longrightarrow \dot{\vec{p}}(t) = \vec{F}$ : la force mesure la variation temporelle de l'échange de quantité de mouvement d'une particule avec le milieu qui interagit sur elle. *Dire que la force agit est ainsi un non-sens physique.* Néanmoins, l'usage entraîne souvent l'utilisation d'expressions comme : « sous l'action de la force $\vec{F}$, la particule... ».

Si la particule est isolée : $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \longrightarrow \forall t,\ \dot{\vec{p}}(t) = \vec{0} \longrightarrow \vec{F} = \vec{0}$, ce qui exprime qu'il n'y a pas d'interaction avec le reste de l'Univers conformément à la définition d'une particule libre (cf. § 2).

La seconde loi de Newton étant une définition issue du principe de conservation de la quantité de mouvement est donc vraie en toute circonstance, que la masse de la particule pour laquelle on exprime $\vec{F}$ varie ou non avec le temps. *Si la masse m est supposée constante,* c'est-à-dire indépendante du temps ($\dot{m} = 0$), alors :

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \dot{\widehat{(m\vec{v})}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a},$$

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} \quad (m = \text{constante}).} \tag{3.4}$$

Dans l'établissement de (3.3 et 4), nous avons supposé la particule P en interaction avec une seule autre particule. Si en fait elle interagit avec plusieurs particules de masses $m_1$, $m_2$, ..., chacune d'elles est la source d'une variation de quantité de mouvement de $m$ mesurée par la force correspondante $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ...(fig. 3.3). Alors l'application du *principe de superposition*, principe très général de la physique que l'on peut énoncer « *des actions simultanées indépendantes produisent des effets additifs* », permet d'écrire :

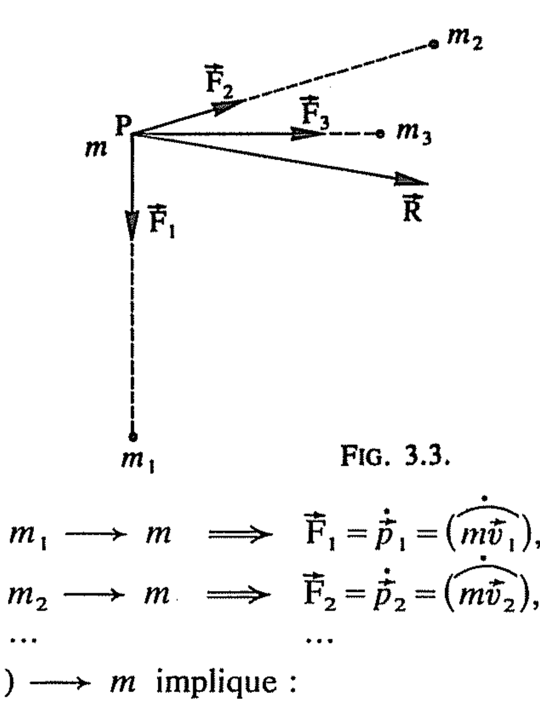



FIG. 3.3.

$$m_1 \longrightarrow m \implies \vec{F}_1 = \dot{\vec{p}}_1 = \dot{\widehat{(m\vec{v}_1)}},$$
$$m_2 \longrightarrow m \implies \vec{F}_2 = \dot{\vec{p}}_2 = \dot{\widehat{(m\vec{v}_2)}},$$
$$\dots \qquad\qquad \dots$$

d'où : $(m_1, m_2, \dots) \longrightarrow m$ implique :

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{F}_i = \vec{R},$$

$\vec{R}$ étant la *résultante* des forces concourantes en P : *la force* $\vec{R}$ *qui mesure l'interaction du système sur* P *est égale à la dérivée temporelle de la quantité de mouvement de la particule* P *qui subit l'interaction.*

L'équation aux dimensions d'une force est $[F] = [M][L][T]^{-2}$. Son unité (SI) est le *newton* (N) ou $m \cdot kg \cdot s^{-2}$.

## 5. TROISIÈME LOI DE NEWTON : ACTION ET RÉACTION

Soit $\vec{F}_1 = \dot{\vec{p}}_1$ la force mesurant l'interaction de 2 sur 1 dans un système isolé de deux particules et soit $\vec{F}_2 = \dot{\vec{p}}_2$ la force mesurant l'interaction de 1 sur 2. Le résultat (3.2) et la définition (3.3) entraînent :

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2,} \tag{3.5}$$

expression mathématique de la *troisième loi de Newton* ou *loi de l'action et de la réaction.*

## 6. FORCES ET MOUVEMENTS

### 6.1 Mouvement curviligne d'une particule de masse *m* variable

*Exemples :* fusée ou automobile dont le combustible diminue dans le temps, aérostat jetant du lest, seiche ou calmar dans sa progression, etc.

Si $m$ est fonction du temps ($\dot{m} \neq 0$), seule la seconde loi de Newton sous la forme : $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \dot{\widehat{(m\vec{v})}}$ a un sens. Soit $\vec{u}_T$ le vecteur unitaire de la vitesse $\vec{v}$ : $\vec{p} = p\vec{u}_T$, d'où : $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \dot{p}\vec{u}_T + p\dot{\vec{u}}_T$. Or nous savons (chap. 2, § 7.3) que $\dot{\vec{u}}_T = \vec{u}_T'(s)\dot{s}(t) = \dfrac{\vec{u}_N}{\rho} v$, $\vec{u}_N$ étant le vecteur unitaire de la normale principale et $\rho$ le rayon de courbure de la trajectoire. Au total, nous aurons :

$$\vec{F} = \dot{p}\vec{u}_T + \frac{pv}{\rho}\vec{u}_N. \tag{3.6}$$

Le premier terme, colinéaire de $\vec{v}$, s'identifie avec la *force tangentielle* $\vec{F}_T$, le second, colinéaire de $\vec{u}_N$ et toujours dirigé vers la concavité de la trajectoire, est la *force normale ou centripète* $\vec{F}_N$ :

$$\boxed{\vec{F}_T = \dot{p}\vec{u}_T, \quad \vec{F}_N = \frac{pv}{\rho}\vec{u}_N, \quad \vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N.} \tag{3.7}$$

### 6.2 Mouvements d'une particule de masse *m* constante

1° *Mouvement curviligne :* si $\dot{m} = 0$, $\dot{p} = \dot{\widehat{(mv)}} = m\dot{v} = ma_T$ et :

$$\boxed{\vec{F}_T = m\dot{v}\vec{u}_T = m\vec{a}_T, \quad \vec{F}_N = m\frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N = m\vec{a}_N, \quad \vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N,} \tag{3.8}$$

décomposition qu'il est possible d'obtenir directement à partir de $\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}}$.

2° *Mouvement circulaire :* si $\rho = R$, rayon du cercle $(\Omega, R)$, la force $\vec{F}_N$ passe constamment par le centre $\Omega$ du cercle.

3° *Mouvement rectiligne :* si $\rho = \infty$, $\vec{F}_N = \vec{0} \longrightarrow \vec{F} = \overline{m\vec{a}}$ est colinéaire de $\vec{v}$; la réciproque est vraie.

4° *Mouvement rectiligne sinusoïdal :* soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la droite $(\Delta)$ sur laquelle oscille la particule P. Prenons l'origine O du vecteur-position $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ sur $(\Delta)$ et posons : $\vec{r} = x\vec{u}$; nous savons (§ 9.2 du chap. 2) que : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, si $\omega$ est la fréquence angulaire du mouvement; ceci s'écrit encore : $\ddot{x}\vec{u} + \omega^2(x\vec{u}) = 0$, soit : $\vec{a} + \omega^2\vec{r} = 0$. Alors de $\vec{F} = m\vec{a}$, il résulte que :

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}.} \tag{3.9}$$

L'interaction responsable d'un mouvement rectiligne sinusoïdal se mesure par une force colinéaire du déplacement de la particule, proportionnelle à lui mais de direction opposée.

## 7. MOMENT D'UNE FORCE LIÉE A UNE PARTICULE

Soit une particule P à l'extrémité d'une tige rigide OP pouvant tourner autour du point fixe O. Appliquons à la particule P un effort physique mesuré par la force $\vec{F}$ (fig. 3.4); cette force $\vec{F}$ peut se décomposer en deux forces équivalentes :

— la force $\vec{F}_{/\!/}$, portée par $\overrightarrow{OP}$, sans effet puisque OP est une tige rigide;

— la force $\vec{F}_\perp$, orthogonale à $\overrightarrow{OP}$, et faisant tourner le point P autour de O dans le plan $(O, \vec{F})$.

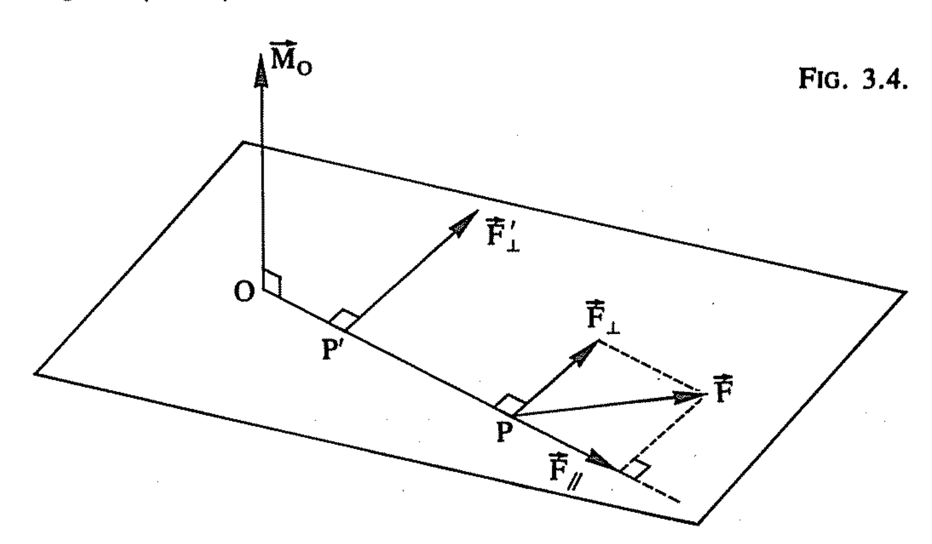


FIG. 3.4.

L'expérience et la théorie élémentaire des leviers, due à Archimède, montrent alors que, du point de vue de la rotation de P à l'extrémité de la tige, les effets sont identiques si, en déplaçant le point d'application P′ de la force, on en modifie la norme de manière à ce que le produit

$OP \times F_\perp = OP' \times F'_\perp$ reste constant (fig. 3.4). Cette grandeur dynamique porte le nom de *moment* $M_0$ *de la force* $\vec{F}$ *par rapport au point* O. Or,

$$M_0 = OP \times F_\perp = OP \times F|\sin(\overrightarrow{OP}, \vec{F})| = \|\overrightarrow{OP}\| \, \|\vec{F}\| \, |\sin(\overrightarrow{OP}, \vec{F})|$$

est la norme de $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$.

Par définition, nous appellerons *moment* $\vec{M}_0$ *de la force* $\vec{F}$ liée à P *et calculé par rapport à un point* O, *le vecteur libre :*

$$\boxed{\vec{M}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}.} \tag{3.10}$$

$\vec{M}_0 = \vec{0}$ si et seulement si : $\overrightarrow{OP} = \vec{0}$ (c'est-à-dire P en O) ou $\vec{F} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{F}$ colinéaires, résultats conformes aux propriétés élémentaires des leviers.

L'équation aux dimensions du moment d'une force est $[M_0] = [M][L]^2[T]^{-2}$; son unité (SI) est le $m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$. On utilise dans la pratique le newton-mètre ($N \cdot m$).

## 8. MOMENT CINÉTIQUE D'UNE PARTICULE

Soit une particule P, de masse $m$ et de quantité de mouvement $\vec{p}$. Par définition, *son moment cinétique par rapport au point* O *est le vecteur libre :*

$$\boxed{\vec{L}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{p}.} \tag{3.11}$$

Le support de $\vec{L}_0$ est donc la direction orthogonale au plan déterminé par $\vec{r}$ et $\vec{p}$ : *si la trajectoire de la particule est plane, en choisissant le point* O *dans ce plan* ($\pi$), *la direction de* $\vec{L}_0$ *reste fixe dans l'espace* puisque orthogonale à ($\pi$) (fig. 3.5).

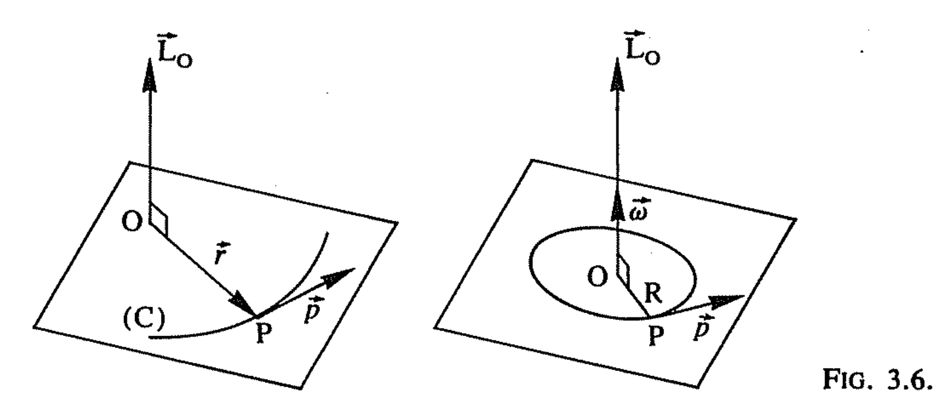



FIG. 3.5. FIG. 3.6.

*Exemples :* • P décrit le cercle (O, R); $p = mv = mR\omega$ et $\vec{p} \perp \vec{R}$ implique : $L_0 = mR^2\omega$. De plus, $\vec{L}_0$ et $\vec{\omega}$ (fig. 3.6) ont le même sens, aussi : $\vec{L}_0 = mR^2\vec{\omega}$.

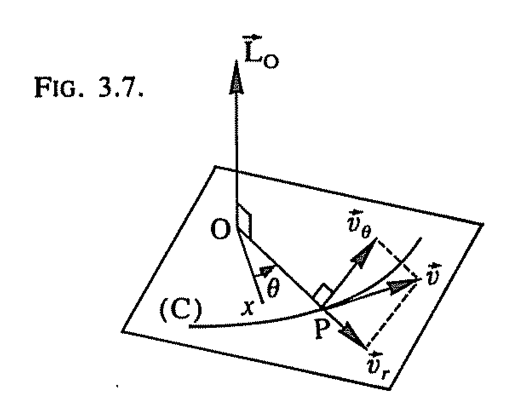
• P décrit une trajectoire plane curviligne (C) (fig. 3.7); sa vitesse $\vec{v}$ est la somme d'une composante *radiale* $\vec{v}_r$ et d'une composante *transversale* $\vec{v}_\theta$ : $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$. Nous aurons alors : $\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\vec{r} \wedge (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m\vec{r} \wedge \vec{v}_\theta$ car $\vec{r} \wedge \vec{v}_r = \vec{0}$ puisque $\vec{r}$ et $\vec{v}_r$ sont colinéaires; comme $\vec{v}_\theta \perp \vec{r}$, $L_0 = mrv_\theta = mr^2\dot{\theta}$ car d'après (2.9), $v_\theta = r\dot{\theta}$, $r$ étant constant pour un déplacement transversal infinitésimal.

Généralement, $\vec{L}_0$ est une fonction vectorielle du temps $t$. Nous pouvons calculer sa dérivée $\dot{\vec{L}}_0$; d'après la définition (3.11) :

$$\dot{\vec{L}}_0 = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{p}} = \vec{v} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_0,$$

car $\vec{v} \,/\!/\, \vec{p}$, $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$; ce résultat s'énonce encore :

FIG. 3.7.




> la dérivée temporelle $\dot{\vec{L}}_0$ du moment cinétique d'une particule P est égale au moment $\vec{M}_0$ de la force $\vec{F}$ appliquée en P, les deux moments étant calculés par rapport au même point O.

## 9. FORCES CENTRALES ET CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE

De $\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0$, il résulte que si $\vec{M}_0 = \vec{0}$, alors le moment cinétique $\vec{L}_0$ *est un vecteur constant*. Or, nous savons (§ 7) que $\vec{M}_0 = \vec{0}$ si $\vec{F} = \vec{0}$ ou $\vec{r}$ et $\vec{F}$ colinéaires :

— si $\vec{F} = \vec{0}$, la particule est libre et décrit une droite ($\Delta$) à vitesse $\vec{v}$ constante : il est aisé de vérifier que son moment cinétique est constant car égal à $L_0 = mvr_0$ où $r_0$ mesure la distance séparant O de ($\Delta$);

— si $\vec{F}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires, ceci implique pour le support de $\vec{F}$ de toujours passer par O. Dans ce cas, la force $\vec{F}$ est dite *centrale* (son support passe par le « centre » O); son moment calculé par rapport à O est nul; $\vec{M}_0 = \vec{0}$, et *le moment cinétique de la particule* P *à laquelle est liée* $\vec{F}$, *calculé* aussi *par rapport à* O, *est constant :* $\vec{L}_0 = \overrightarrow{\text{constant}}$.

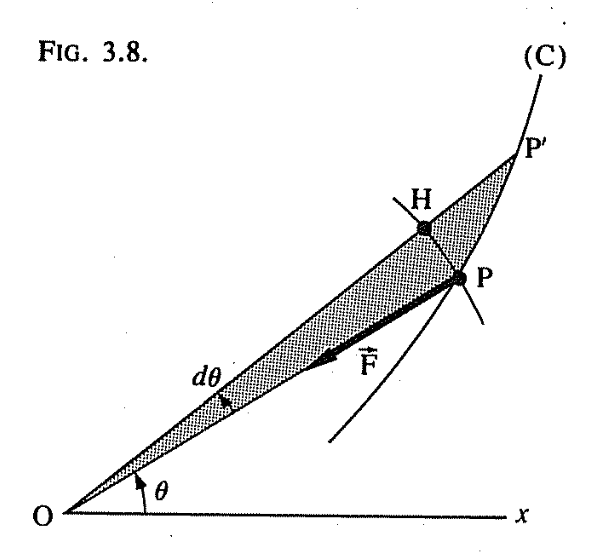
On dit que le moment cinétique, dans le cas d'une force centrale, est une *constante du mouvement*; la réciproque est vraie; si $\vec{L}_0$ est constant, $\dot{\vec{L}}_0 = \vec{0} \longrightarrow \vec{M}_0 = \vec{0}$ et soit $\vec{F} = \vec{0}$, soit $\vec{F}$ est une force centrale.

Ce résultat, qui exprime le principe de la *conservation du moment cinétique pour les forces centrales,* est très important car nous verrons que de nombreuses interactions se mesurent par des forces centrales (ex. : gravitation, interaction coulombienne, forces élastiques, etc.).

Une conséquence immédiate de la conservation de $\vec{L}_0$ est ce qu'il est convenu d'appeler *la loi des aires :* si $\vec{L}_0 = \overrightarrow{\text{constant}}$, la trajectoire est plane car $\vec{r} \perp \vec{L}_0$; de $L_0 = mr^2\dot{\theta}$, il résulte : $r^2\dot{\theta} = $ constante. Or, si on regarde le

déplacement $\widehat{PP'}$ de la particule sur sa trajectoire (C) pendant l'intervalle de temps d$t$, le vecteur $\vec{r}$ balaye l'aire infinitésimale dA du triangle OPP' (fig. 3.8); cette aire est sensiblement égale à celle du triangle OPH mesurée par :

FIG. 3.8.




$$\frac{1}{2}\,\mathrm{OP}\times\mathrm{PH}=\frac{1}{2}\,r\times r\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\,r^2\mathrm{d}\theta.$$

Ainsi, de $\mathrm{dA}=\frac{1}{2}\,r^2\mathrm{d}\theta$, il résulte que :

$$\dot{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\,r^2\dot{\theta}=\frac{\mathrm{L}_0}{2m}=\text{constante.}$$

Quand une particule P se déplace sous l'action d'une force centrale, sa trajectoire est plane et le rayon vecteur de P balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

# 4

# INTERACTIONS ET FORCES

Dans le chapitre précédent, nous avons développé la notion de force en soulignant comment cette expression mathématique mesurait en fait l'intensité des interactions des particules d'un système sur l'une d'elles.

Si maintenant nous cherchons à préciser, dans l'état actuel de nos connaissances, les interactions fondamentales de la Physique, on peut en citer quatre : *la gravitation, l'électromagnétisme, les interactions nucléaires fortes et faibles*. Toutes les autres interactions qui peuvent apparaître dans la description macroscopique de phénomènes quotidiens en découlent : par exemple, la friction, la viscosité, la tension superficielle, l'élasticité,...

Dans la Physique courante, seules les deux premières interactions fondamentales nous concernent réellement, les autres de type nucléaire n'ayant qu'une très faible portée d'action : au-delà d'une distance de séparation interparticulaire de l'ordre de $10^{-15}$ m, leurs effets sont nuls; ce sont néanmoins ces interactions nucléaires qui déterminent la structure et la stabilité des noyaux atomiques, permettant de comprendre, à titre d'exemples, pourquoi $^{16}O$ est stable, $^{40}K$ radioactif et $^{235}U$ capable de se désintégrer par fission.

## LES INTERACTIONS FONDAMENTALES

### 1. L'INTERACTION DE GRAVITATION

C'est de loin la plus anciennement connue car, de tout temps, l'homme a observé et tenté de comprendre le mouvement apparent des corps célestes et en particulier des planètes. La description cinématique du mouvement des planètes a été formulée par Kepler (1571-1630) sous la forme de trois lois déduites des observations astronomiques de Tycho Brahé :

— les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers;

— le vecteur-position de chaque planète, par rapport au Soleil, balaye des aires égales de sa trajectoire en des temps égaux;

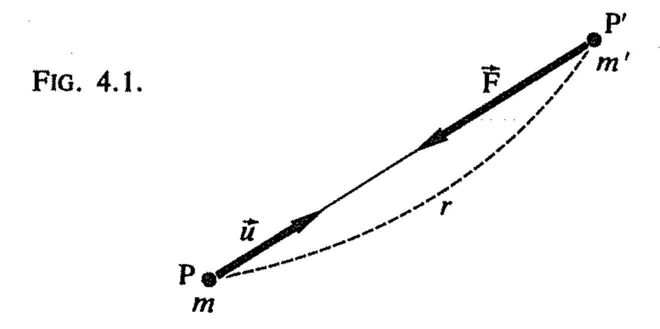
— les carrés des périodes T de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes $2a$ des ellipses :

$$T^2 = ka^3 (k = C^{te}).$$

Ce fut Newton qui, en 1666, à partir de l'analyse mathématique des lois de Kepler (en particulier la seconde qui, exprimant la loi des aires (§ 9 du chap. 3), implique une force centrale) et généralisant son résultat à deux masses quelconques, énonça la *loi de la gravitation universelle :*

> L'interaction de gravitation entre deux particules peut s'exprimer par une force attractive dirigée selon la ligne joignant les deux particules, proportionnelle à la masse de chacune d'elles et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

FIG. 4.1.




Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, lié à la particule P de masse $m$ et dirigé vers l'autre P' de masse $m'$ (fig. 4.1), l'interaction de gravitation de P sur P' se mesure par :

$$\boxed{\vec{F} = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \vec{u} = -\gamma \frac{mm'}{r^3} \vec{r},} \qquad (4.1)$$

en posant $\vec{r} = r\vec{u}$ pour $\overrightarrow{PP'}$, vecteur-position relative de P' par rapport à P.

L'expression (4.1) appelle quelques remarques :

— elle s'applique à deux particules dont les masses respectives $m$ et $m'$ sont supposées concentrées en P et P' : on ne peut donc pas l'utiliser sans précaution pour des corps étendus;

— l'attraction de $m'$ sur $m$ s'exprime par : $\vec{F}' = -\gamma \frac{m'm}{r^2} \vec{u}'$, où $\vec{u}'$ est le vecteur unitaire issu de P'. La comparaison avec $\vec{F}$ établit que $\vec{F}' = -\vec{F}$ (puisque $\vec{u}' = -\vec{u}$), résultat conforme à la loi de l'action et de la réaction;

— $\gamma$ *est une constante universelle* déterminée expérimentalement; sa valeur dans le Système International est :

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}};$$

— la portée de l'interaction de gravitation s'étend des distances atomiques aux distances astronomiques : de ses conséquences vérifiées sur tout ce domaine, nous pouvons affirmer que la puissance à laquelle on élève la

variable $(1/r)$ est le nombre *entier* 2 et non pas un réel approché (2,000...) susceptible d'être mieux défini dans l'avenir.

De la première remarque, il découle que si l'on veut calculer la force d'attraction qui mesure l'interaction gravitationnelle de la Terre, de masse M et de rayon R, sur une particule P' de masse $m'$ située à sa surface (fig. 4.2), on doit appliquer la loi (4.1) à toutes les particules P, de masses respectives $dm$, qui, une fois rassemblées, constituent la Terre de volume V :

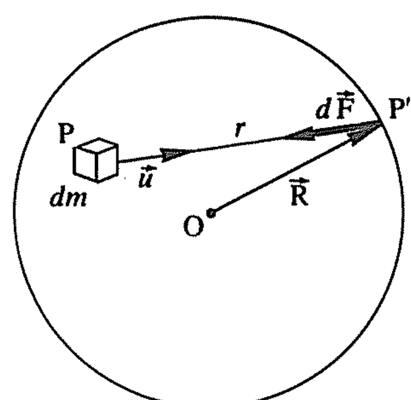



FIG. 4.2.

Alors :

$$\vec{F} = \int_V d\vec{F} = -\gamma m' \int_V \frac{dm}{r^2}\,\vec{u}.$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm'}{R^3}\,\vec{R} \quad (\vec{R} = \overrightarrow{OP'}),$$

expression formellement identique à (4.1) *comme si la masse* M *de la Terre était concentrée en son centre* O.

Or, l'expérience nous enseigne que la gravitation terrestre sur une particule $m'$ se mesure aussi *localement* par : $\vec{F}' = m'\vec{g}$, où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur dirigé selon la verticale du lieu; nous devons donc identifier $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ et écrire :

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{R^3}\,\vec{R} \quad \text{ou} \quad g = \gamma \frac{M}{R^2}. \qquad (4.2)$$

Connaissant $g(\sim 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})$ et $R(6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m})$, il est ainsi possible d'en déduire la masse de la Terre $(M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg})$.

## 2. L'INTERACTION ÉLECTRIQUE

La foudre, les décharges que l'on ressent, par temps sec, quand on veut tourner la poignée métallique d'une porte d'un appartement dont le sol est couvert de moquette, les cheveux qui s'écartent mutuellement alors qu'on les peigne, tous ces phénomènes sont des manifestations de cette nouvelle interaction fondamentale.

Une expérience très simple permet d'en constater l'existence et de montrer qu'elle est susceptible de combattre l'interaction de gravitation : en frottant une baguette de quartz ou de verre avec un foulard de soie ou un

bâton en ébonite avec une peau de chat, il est possible d'attirer violemment des petits morceaux de papier ou des fragments de mousse de polystyrène utilisée pour l'isolation thermique. Sous l'effet du frottement, le quartz et l'ébonite acquièrent ainsi une *propriété* que nous qualifions « *d'électrique* » donnant naissance à une nouvelle interaction « l'attraction électrique » dont l'intensité à courte distance peut être très supérieure à celle de la gravitation terrestre.

Considérons maintenant la balance de torsion conçue par Coulomb (1780) pour étudier l'interaction électrique : l'appareil comprend (fig. 4.3) une tige non métallique terminée par deux petites boules métalliques B et B′ et suspendue horizontalement en O par un fil de torsion. On dispose par ailleurs d'une autre tige T, en matériau non métallique (verre, quartz, ambre, ébonite, etc.) terminée elle aussi par une sphère métallique A.

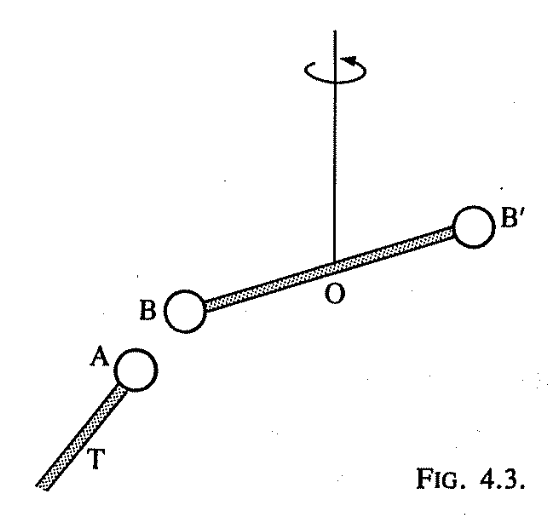



FIG. 4.3.

Frottons la tige T en verre (ou quartz) avec le foulard, puis approchons la boule A de B jusqu'au contact : le pendule s'écarte alors de la tige. Le résultat est le même si T, en ébonite (ou ambre), est frottée avec la peau de chat. On est ainsi tenté de dire que, pour tout matériau, la propriété électrique apparue sur T par frottement s'est transmise par contact à la tige BB′, comme s'il y avait eu écoulement de « quelque chose » de A vers B et, de plus, qu'elle est la même en tout cas puisqu'elle induit toujours une répulsion de B vers A.

Cette conclusion est erronée sur deux points :
— une tige T métallique, une fois frottée, ne provoquera jamais la déviation du pendule : cette caractéristique permet de classer les matériaux en *isolants* (corps organiques, plastiques, bois,...) et en *conducteurs électriques* (métaux et alliages);
— établissons de nouveau le contact de la tige T en verre, après frottement, avec le pendule : il y a répulsion de B par A; puis retirons la tige T en la remplaçant par une tige T′ en ébonite; après friction, quand on approche A de B et alors qu'il n'y a pas eu de contact, on constate que la boule B est attirée vers A.

De nombreuses expériences imposent ainsi les propriétés de l'interaction électrique :
— le phénomène « triboélectrique » (électricité par frottement) se traduit par l'existence d'un fluide appelé *électricité* qui peut se transférer d'un

corps à l'autre : dans un conducteur, ce transfert se fait rapidement et dans son intégralité alors que dans un isolant, seule l'électricité voisine de la surface de contact s'écoule;
— il y a deux électricités : l'électricité *positive* (du type verre) et l'électricité *négative* (du type ambre) puisque, selon les circonstances expérimentales, il y a attraction ou répulsion de la balance;
— la quantité d'électricité ou *charge électrique* transférée peut varier avec la durée du contact ou du frottement. Il faudra donc définir une unité de mesure (S. I.) de charge électrique qui sera le *coulomb* (C). La charge électrique, mesurée en coulombs, est alors caractérisée par un *scalaire* $q$, positif ou négatif, selon le type d'électricité considéré;
— la charge totale d'un système isolé (somme algébrique des charges électriques de tous ses constituants) est un invariant : ceci exprime *le principe de conservation de la charge* pour lequel aucune exception n'a encore été trouvée :

> Quels que soient les processus pouvant se produire à l'intérieur d'un système isolé, il n'y a jamais modification de la charge électrique totale.

— le principe de superposition s'applique aux charges : si une interaction d'une charge $q$ sur une charge $q'$ se manifeste par une attraction ou une répulsion caractérisée par la force $\vec{F}$, l'interaction de la charge $2q$ sur $q'$, dans les mêmes conditions, se mesure par $2\vec{F}$.

L'énoncé précis de l'interaction *électrostatique* — qui existe entre deux particules chargées au repos ou se déplaçant avec une faible vitesse dans le référentiel d'inertie de l'observateur — constitue la *loi de Coulomb :*

> L'interaction électrostatique entre deux particules chargées est proportionnelle à leurs charges $q$ et $q'$, inversement proportionnelle au carré de leur distance mutuelle $r$. Elle est mesurée par une force portée par la droite joignant les deux charges, répulsive ou attractive selon que les charges sont ou non de même signe.

Mathématiquement, ceci s'exprime par (fig. 4.4) :

$$\boxed{\vec{F} = K\frac{qq'}{r^2}\vec{u} = K\frac{qq'}{r^3}\vec{r}.} \quad (4.3)$$

$q$ $\vec{u}$ $\vec{r}$ $q'$ $\vec{F}$

FIG. 4.4.

$\vec{F}$ mesurant l'interaction de $q$ sur $q'$, $\vec{r} = r\vec{u}$ étant le vecteur issu de $q$ et joignant $q'$, K étant une constante dépendant des unités et du milieu où sont considérées les particules.

La définition de l'unité de charge se fait à partir de (4.3) mais notre méconnaissance *simultanée* de K et de l'unité de charge nous conduit à une alternative :

— nous pouvons définir arbitrairement l'unité de charge : la mesure de $q$, $q'$, $\vec{r}$ et $\vec{F}$ nous permet d'atteindre expérimentalement K;

— *pour un milieu donné*, nous fixons la valeur de K; en considérant deux charges égales $q = q'$, la mesure de $\vec{r}$ et $\vec{F}$ nous donne $q$, ce qui définit l'unité de charge.

Les physiciens ont adopté la seconde méthode : *dans le vide et pour le Système International* on pose :

$$K = 10^{-7}c^2 = 10^{-7} \times (2{,}9979 \cdot 10^8)^2 = 8{,}9874 \cdot 10^9 \# 9 \cdot 10^9 \text{ (S. I.)},$$

$c = 2{,}9979 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ étant la vitesse de la lumière dans le vide. Ainsi de :

$$\vec{F} = 8{,}9874 \cdot 10^9 \frac{qq'}{r^3}\,\vec{r},$$

il résulte la définition du *coulomb* (C) comme unité de charge (S. I.) :

> le coulomb est la charge qui, placée dans le vide à un mètre d'une charge identique, la repousserait avec une force de $8{,}9874 \cdot 10^9$ N.

Nous verrons ultérieurement (§ 2 du chap. 5) comment il est possible avec Millikan de prouver qu'une charge électrique est quantifiée, c'est-à-dire égale ou multiple d'une charge élémentaire appelée *électron* (e) et dont la valeur est :

$$\boxed{e = 1{,}6021 \cdot 10^{-19} \text{ C.}}$$

Ce résultat établit de façon frappante combien le coulomb est une grande unité de charge : bien adaptée à l'électrocinétique, elle ne l'est pas du tout aux phénomènes atomiques.

Dans le *Système International*, si le symbole [Q] représente la charge mesurée en C, nous pouvons dire que l'équation aux dimensions de K est : $[K] = [M][L]^3[T]^{-2}[Q]^{-2}$ et que cette constante se mesure en $\text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{C}^{-2}$.

Si, pour des raisons pratiques, on définit la *permittivité du vide* $\varepsilon_0$ par :

$$\boxed{K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0};} \qquad (4.4)$$

la loi de Coulomb s'écrit encore :

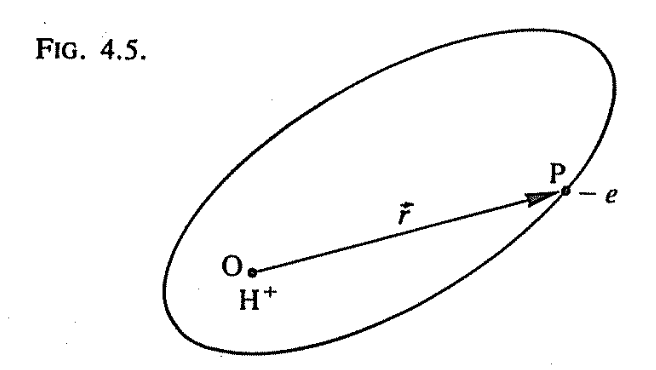
$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\,\vec{r},} \qquad (4.5)$$

avec : $$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K} = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^2 \cdot C^2.$$

*Remarque :* On notera la similitude formelle de la loi de la gravitation universelle (4.1) et de la loi de Coulomb (4.3). Les conséquences dues à l'existence de l'une de ces interactions sont donc immédiatement transposables pour l'autre, par la correspondance : $m \longleftrightarrow q$, $m' \longleftrightarrow q'$, $-\gamma \longleftrightarrow K$. Il y a tout de même une limite à cette similitude : les masses sont des scalaires strictement positifs et la valeur algébrique de la force de gravitation est toujours négative ($F_\gamma < 0$ = attraction) alors que les charges $q$ et $q'$ sont des scalaires algébriques : si $qq' > 0$, $F_K > 0$ = répulsion et si $qq' < 0$, $F_K < 0$ = attraction.

Comme nous le remarquions pour la gravitation, les causes $q$ et $q'$ de l'interaction électrique sont concentrées sur P et P' : on ne peut donc pas utiliser sans précaution la loi de Coulomb pour les corps étendus porteurs de charges. La conclusion en ce qui concerne une sphère pleine (ou creuse) dans (ou sur) laquelle se répartit une charge électrique totale $q$ est également valable : tout se passe comme si la charge $q$ était concentrée au centre O de la sphère. Ceci permet de mieux comprendre pourquoi la balance de Coulomb terminée par des sphères métalliques se comporte comme si ces sphères étaient ponctuelles.

FIG. 4.5.




Pour terminer et situer les interactions de gravitation et électrique, l'une par rapport à l'autre, considérons le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène : un électron P, de charge $-e$ ($e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C) et de masse $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg, décrit (fig. 4.5) une ellipse dont un des foyers O est un proton $H^+$, de charge $+e$ et de masse $m_{H^+} = 1\,840\ m_e$. L'atome est neutre puisque sa charge totale est nulle. Pour une même position $r$ de l'électron par rapport au proton, le rapport des forces s'écrit :

$$\frac{F_\gamma}{F_K} = \frac{\gamma \times 1\,840 \times m_e^2}{K \times e^2} = 4{,}4 \cdot 10^{-40}.$$

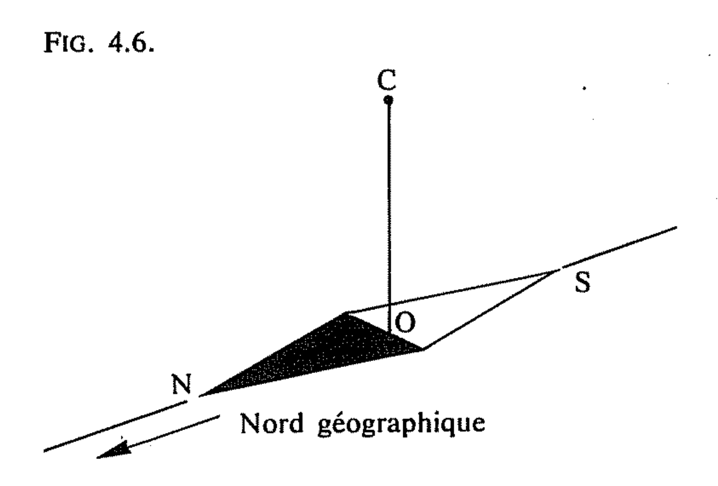
Ainsi, dans le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, la force de gravitation qui peut être responsable du mouvement de l'électron autour du proton est $10^{40}$ fois plus faible que la force électrique pouvant donner le même résultat physique : l'interaction de gravitation est donc, dans ce cas, totalement négligeable.

## 3. L'INTERACTION MAGNÉTIQUE

Depuis fort longtemps les navigateurs utilisent une boussole pour se diriger sur la mer, admettant implicitement de ce fait qu'il existe une nouvelle interaction appelée *magnétisme*, les corps sensibles à cette interaction ou susceptibles de la produire étant des *aimants*.

Considérons une telle boussole constituée d'une lame d'acier en forme de losange et suspendue, par son centre de masse O, à un fil sans raideur (fig. 4.6). Abandonnée à elle-même et quelle que soit sa position d'origine, elle va tourner autour de sa suspension jusqu'à ce qu'une de ses extrémités (et toujours la même) s'oriente sensiblement vers le Nord géographique de la Terre : c'est la constance de cette propriété qui traduit l'intérêt des navigateurs pour une boussole. Cette expérience montre de plus que les extrémités de la boussole appelées « pôles » ne sont pas équivalentes puisque c'est toujours le même pôle N (N pour « Nord ») qui se dirige vers le Nord alors que l'autre pôle S (S pour « Sud ») regarde évidemment le Sud géographique.

FIG. 4.6.




Il est aisé de voir que le mouvement de la boussole ne peut résulter des interactions déjà étudiées : sa construction et sa petite taille élimine la gravitation (forces égales et bras de leviers égaux produisent un moment total nul par rapport à O : il ne peut y avoir rotation); en approchant de N et/ou de S des baguettes chargées électriquement, il n'y a aucun effet électrostatique. On est donc amené logiquement à la conclusion que la terre est un gigantesque aimant interagissant avec la boussole selon un nouveau processus.

Le magnétisme terrestre ne se manifeste pas partout de la même manière : en certains endroits du relief terrestre, la boussole n'indique manifestement plus le Nord; ceci se produit notamment dans les régions riches en minerais de fer (comme la magnétite), de cobalt, de nickel, de manganèse, éléments constitutifs des aimants. Cette déviation résulte du principe de superposition : au magnétisme de la Terre considérée comme un tout s'ajoute les effets du magnétisme local.

Mettons maintenant en présence deux boussoles identiques du type ci-dessus. Si elles sont assez proches et quelles que soient leurs positions initiales, lorsqu'on les abandonne à elles-mêmes, elles finissent toujours par prendre une position mettant sensiblement en regard le pôle Nord de

l'une avec le pôle Sud de l'autre et vice versa (fig. 4.7) : il y a donc *attraction* de pôles différents (N et S', S et N') et la *répulsion* des pôles identiques (N et N', S et S') est aisée à établir.

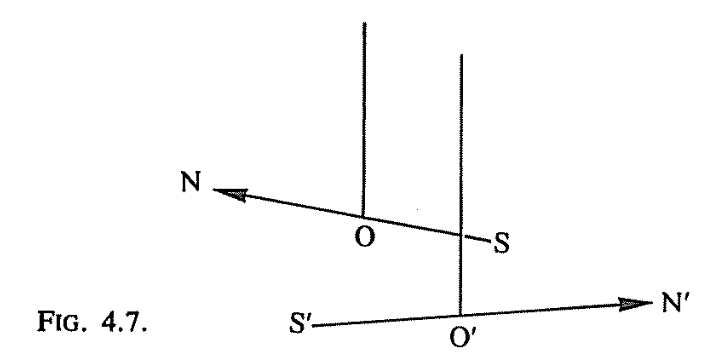



FIG. 4.7.

On peut donc concevoir une balance de torsion comme celle de Coulomb dont le fléau serait une aiguille aimantée soumise à des attractions ou répulsions de pôles d'aimants variés. Il en résulterait une expression donnant l'intensité de l'interaction magnétique. Cette démarche expérimentale a été effectivement réalisée puis abandonnée car incapable d'expliquer le magnétisme. En effet, alors qu'en électrostatique il est possible d'isoler des charges de signes opposés, cela ne peut se faire dans l'étude du magnétisme : un aimant coupé en son milieu donne deux aimants et cette opération ne permet pas d'isoler un pôle Nord d'un pôle Sud.

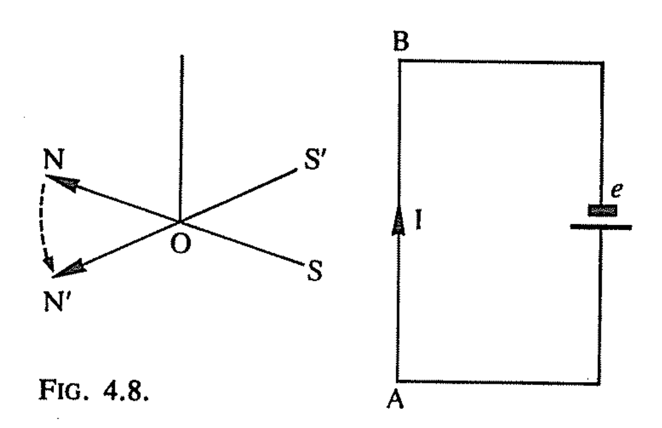



FIG. 4.8.

La solution à ce problème a été apportée par l'étude du comportement d'une boussole en présence d'un courant électrique continu (fig. 4.8). Soit un conducteur rectiligne vertical AB dans lequel un courant continu I peut circuler de A vers B. Si l'on rend par construction AB orthogonal à la direction NS de la boussole en l'absence de courant, quand celui-ci est établi l'aiguille dévie selon N'S', nouvelle position perpendiculaire à la précédente : les charges électriques qui se déplacent dans le fil AB produisent donc une interaction magnétique que la boussole détecte. Ce résultat est général et s'énonce :

| |
|---|
| Le magnétisme est une manifestation du mouvement des charges électriques. |

Il entraîne comme corollaire que les interactions électriques et magnétiques sont en fait les manifestations, différentes selon les conditions expérimentales, d'une interaction plus générale, *l'électromagnétisme*.

D'un point de vue microscopique, on peut se représenter un aimant comme constitué de certains types d'atomes (ex : Fe, Co, Ni, Mn,...) dont les électrons dans leurs mouvements de rotation autour des noyaux additionnent leurs effets magnétiques individuels. Macroscopiquement, cette additivité se traduit dans l'espace par l'existence du *vecteur induction magnétique* $\vec{B}$, caractéristique de l'intensité de l'interaction magnétique que peuvent exercer, en un point de l'espace, toutes les sources d'effets magnétiques (aimants statiques, électro-aimants, conducteurs dans lesquels circulent des courants électriques, etc.).

Alors, si une particule de charge $q$ se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans l'espace où existe une induction magnétique $\vec{B}$, l'expérience permet d'écrire pour la force $\vec{F}$ qui mesure l'interaction magnétique de l'espace sur $q$ :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.} \tag{4.6}$$

On remarquera que :

— $\vec{F} = \vec{0}$ si $q = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou encore $\vec{v}$ et $\vec{B}$ colinéaires : il n'y a pas d'interaction magnétique si la particule n'est pas chargée, ou si elle est au repos dans un repère galiléen ou enfin si sa vitesse est parallèle au support du vecteur induction $\vec{B}$;

— dans tous les autres cas, la force $\vec{F}$ est orthogonale au plan $(\vec{v}, \vec{B})$ : pour $q > 0$, $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est une base directe de $\mathcal{E}$ orienté par R (fig. 4.9, *a*) alors que pour $q < 0$, $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est une base rétrograde (fig. 4.9, *b*);

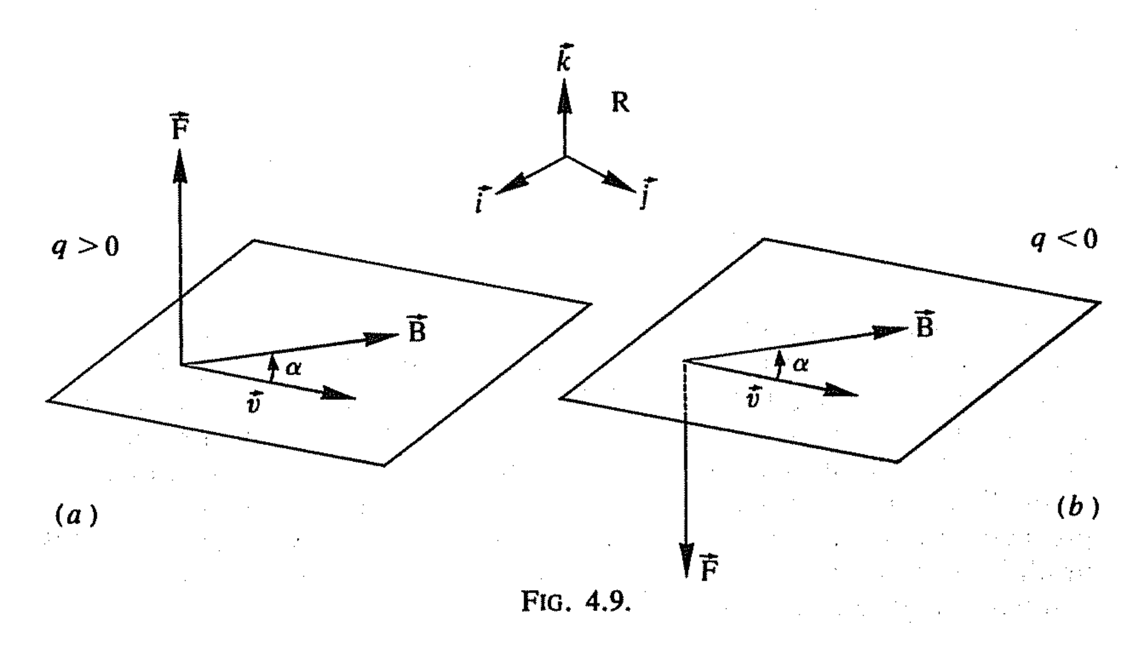



FIG. 4.9.

— F est maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{B}$, et a pour valeur : $F = qvB$. Cette propriété permet de définir l'unité d'induction magnétique (S.I.), le *tesla* (T) :

Une induction magnétique d'un tesla produirait une interaction d'un newton sur une charge d'un coulomb se déplaçant dans une direction orthogonale au vecteur induction magnétique avec une vitesse d'un mètre par seconde.

L'équation aux dimensions de l'induction magnétique s'écrit : $[B] = [T]^{-1}[M][Q]^{-1}$ et par suite un tesla vaut un $kg \cdot s^{-1} \cdot C^{-1}$.

## 4. NOTION DE CHAMPS

Considérons à l'instant $t$ une particule $P_1$, de masse $m_1$, de charge $q_1$, de faible vitesse $\vec{v}_1$, dont la position est repérée par le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Supposons qu'en O existe une particule de masse $m$ et de charge $q$ et que, de plus, dans la région où se déplace $P_1$ il y ait une induction magnétique $\vec{B}$.

Le principe de superposition entraîne, qu'au même instant, les trois types d'interaction qui s'exercent sur $P_1$ ajoutent leurs effets. La résultante $\vec{R}_1$ des forces correspondantes sera :

$$\vec{R}_1 = m_1\left(-\gamma \frac{m}{r^3}\vec{r}\right) + q_1\left(K\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) + q_1\vec{v}_1 \wedge (\vec{B}).$$

Si au même point P, nous avions considéré une autre particule $P_2(m_2, q_2, \vec{v}_2)$, la résultante $\vec{R}_2$ des forces aurait été :

$$\vec{R}_2 = m_2\left(-\gamma \frac{m}{r^3}\vec{r}\right) + q_2\left(K\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) + q_2\vec{v}_2 \wedge (\vec{B}),$$

et pour les deux particules :

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

$$= [m_1 + m_2]\left(-\gamma \frac{m}{r^3}\vec{r}\right) + [q_1 + q_2]\left(K\frac{m}{r^3}\vec{r}\right) + [q_1\vec{v}_1 + q_2\vec{v}_2] \wedge (\vec{B}).$$

Toutes les grandeurs physiques dont l'expression apparaît à l'intérieur des parenthèses ( ) restent invariantes d'une particule à l'autre et définissent donc une superposition d'*états physiques de l'espace* environnant le point P appelés généralement *champs* : l'état physique lié à la gravitation est le *champ gravitationnel*, celui lié à l'interaction électrostatique est le *champ électrique* et le dernier est le *champ magnétique*.

Même si nous n'avions pas su qu'en O existait une particule $(m, q)$ responsable des champs gravitationnel et électrique, le simple fait d'amener une particule $m_1$ non chargée en P aurait mis en évidence l'existence du champ gravitationnel à cause de la force correspondante qui s'exercerait sur $m_1$. Ce champ étant détecté, une particule $(m_1, q_1)$ déposée en P à vitesse nulle serait alors sensible à l'action des deux champs ci-dessus. Si enfin, $(m_1, q_1)$ était placée en P avec une vitesse différente de zéro et non dirigée selon $\vec{B}$, la présence du champ magnétique se manifesterait par une action supplémentaire.

*Il apparaît donc non nécessaire de préciser de façon détaillée quelles sont les sources de ces différents champs :* leur existence se manifeste par la force correspondante mesurée sur une particule de masse, charge et vitesse quelconques.

Par définition, pour un point P de $\mathcal{E}$ :

1° *l'intensité du champ gravitationnel* $\vec{G}$ est définie comme la force exercée sur l'unité de masse placée en P :

$$\boxed{\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m'} \iff \vec{F} = m'\vec{G},} \tag{4.7}$$

et le *champ gravitationnel produit en* P *par une particule de masse m située en* O, vaut :

$$\boxed{\vec{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u} = -\gamma \frac{m}{r^3} \vec{r}, \quad (\vec{r} = \overrightarrow{OP}).} \tag{4.8}$$

Cette interaction étant attractive, $\vec{G}$ *est toujours orienté vers la masse qui en est la cause.* Son équation aux dimensions est celle d'une accélération et son unité de mesure (S. I.) est le $m \cdot s^{-2}$.

2° *l'intensité du champ électrique* $\vec{E}$ est définie comme la force exercée sur l'unité de *charge positive* ($q' = +1C$) placée en P :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} \iff \vec{F} = q'\vec{E}.} \tag{4.9}$$

*Le champ électrique produit en* P *par une particule de charge q située en* O, vaut :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (\vec{r} = \overrightarrow{OP}).} \tag{4.10}$$

Il est *répulsif* car dirigé selon $\vec{r}$ si $q > 0$, *attractif pour* $q < 0$.

L'équation aux dimensions d'un champ électrique est $[E] = [M][L][T]^{-2}[Q]^{-1}$ et son unité (S. I.) est le $m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$.

3° *l'intensité du champ magnétique est mesurée par* $\vec{B}$, le vecteur-induction magnétique. D'après le § 3, son support ($\Delta$) est tel que toute particule chargée se déplaçant parallèlement à ($\Delta$) a le comportement d'une particule libre ($\vec{F} = \vec{0}$).

De ces définitions, il résulte qu'une particule de charge $q$, de vitesse $\vec{v}$, plongée dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ est soumise à une interaction donnée par l'expression :

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}), \tag{4.11}$$

dite *force de Lorentz*.

En un point P de l'espace, le principe de superposition s'applique pour tous les champs de *même nature* : ceci se traduit, si des sources variées sont responsables de champs de type $\vec{G}_i$, $\vec{E}_j$, $\vec{B}_k$ par les relations d'addition :

$$\vec{G} = \sum_i \vec{G}_i, \quad \vec{E} = \sum_j \vec{E}_j, \quad \vec{B} = \sum_k \vec{B}_k.$$

*Exemple :* Soit une charge $q_1 > 0$ et une charge $q_2 < 0$, distantes de AB (fig. 4.10); en tout point P, on peut construire le champ $\vec{E}$ résultant de la superposition de :

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{AP}}{AP^3} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{BP}}{BP^3}.$$

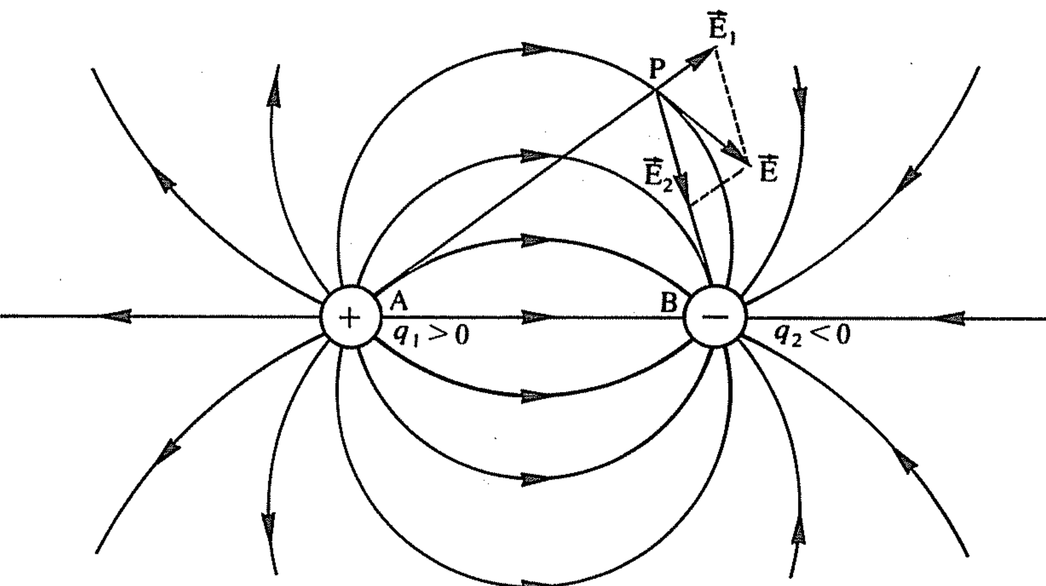



FIG. 4.10.

Il est possible de mieux représenter le champ résultant par ses *lignes de force*, c'est-à-dire les courbes telles qu'en tout point P la direction du champ $\vec{E}$ soit tangente à la courbe passant par ce point. Par exemple, pour une charge ponctuelle $q > 0$, les lignes de force sont les rayons issus de la charge (fig. 4.11,a) et pour $q < 0$, les mêmes rayons dirigés vers la charge (fig. 4.11, b). Nous avons aussi représenté quelques lignes de force pour les deux charges de la fig. 4.10.

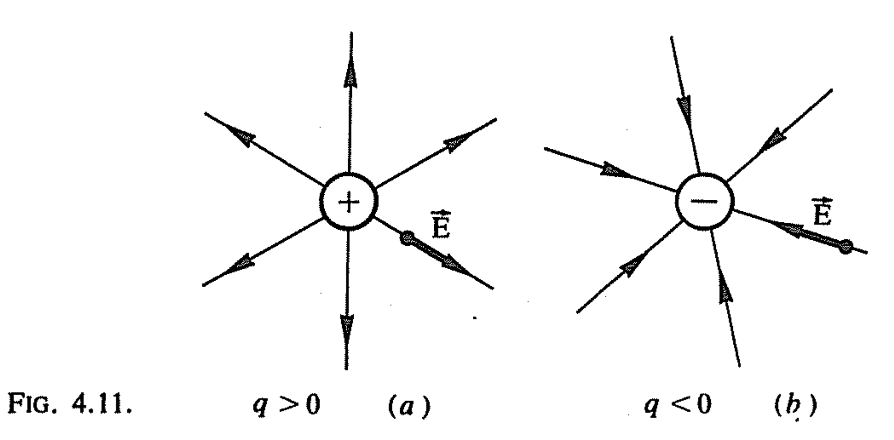



FIG. 4.11. $q > 0$ (*a*) $q < 0$ (*b*)

Dans l'étude des interactions de gravitation ou électrique, nous avons vu essentiellement des champs produits par des particules. Or, il existe également des champs résultants de sources étendues et, en particulier, ce que l'on appelle des *champs uniformes : un champ uniforme est caractérisé par un vecteur champ constant* c'est-à-dire qu'en tout point de l'espace où il existe, sa grandeur, son support et sa direction ne changent pas.

*Les masses et charges ponctuelles ne peuvent produire de champ uniforme*. Il suffit pour s'en convaincre d'examiner les expressions (4.8 et 10) : à une distance *r* donnée, $|G|$ et $|E|$ sont les normes constantes des vecteurs $\vec{G}$ et $\vec{E}$ dont *les supports ne sont pas fixes* ce qui implique la non-constance de ces vecteurs.

Seules des masses ou des charges étendues (en surface ou en volume) peuvent, en certaines circonstances, produire des champs uniformes.

*Exemples :*

- *localement, le champ de pesanteur* est constant donc *uniforme* puisque mesuré par $\vec{g}$ de norme constante et dont le support est la verticale du lieu orientée vers le centre de la Terre;
- deux plateaux métalliques parallèles de grande surface portant respectivement des charges égales et opposées (Q et −Q) donnent naissance, entre eux, à un *champ électrique sensiblement uniforme* $\vec{E}_0$ dont les lignes de forces sont représentées sur la fig. 4.12, champ dirigé de la plaque positive vers la plaque négative;

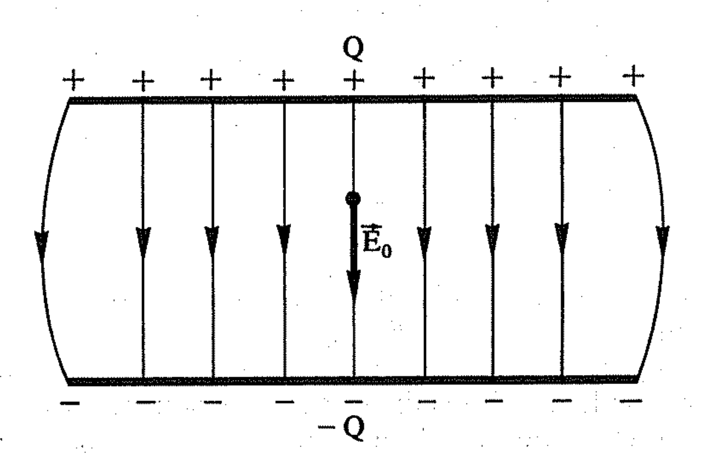



FIG. 4.12.

- dans l'entrefer d'un électro-aimant de grande taille, dont les flasques sont parallèles, le *champ magnétique* $\vec{B}_0$ *est sensiblement uniforme* et perpendiculaire aux flasques;
- à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant continu le champ magnétique induit est uniforme, de support parallèle à l'axe du solénoïde.

## LES INTERACTIONS DÉRIVÉES

## 5. FORCES DE FROTTEMENT

### 5.1 Solide sur solide

Considérons deux corps solides en contact : ils exercent toujours une interaction l'un sur l'autre. Par exemple, si un livre repose sur une table horizontale, ceci implique que cette table exerce vers le haut une poussée

mesurée par une force égale en grandeur au poids du livre. De même, elle subit, de la part du livre, une poussée dirigée vers le bas et aussi égale au poids du livre.

Ces remarques ne nous renseignent en rien sur l'interaction de contact : il faut pousser l'analyse jusqu'à la structure microscopique de la matière pour en conclure qu'elle est essentiellement d'origine électrique.

Tant que la table est horizontale, la force qu'elle exerce sur le livre est verticale : on parle de *réaction normale.* Si maintenant la table est inclinée d'un angle $\alpha$, on constate que le livre reste en place — comme s'il était retenu par la table — jusqu'à ce que l'angle $\alpha$ atteigne une valeur critique $\alpha_c$ à partir de laquelle il commence à glisser.

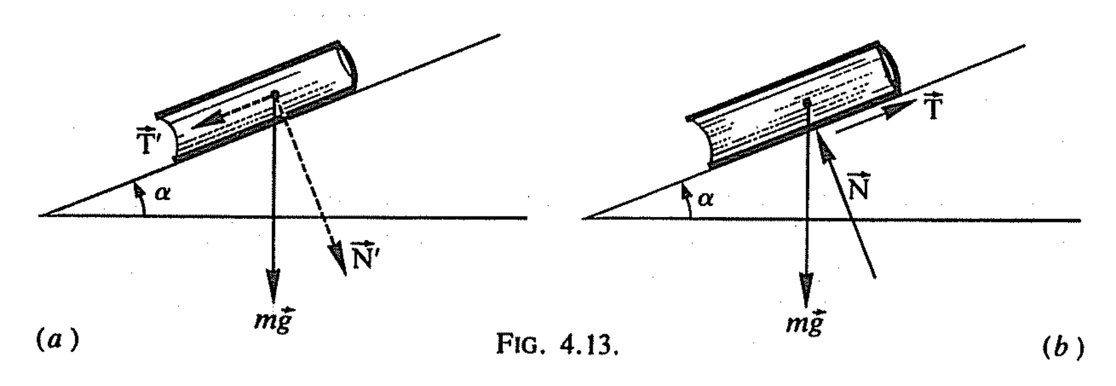



FIG. 4.13.

Représentons sur les figures (4.13) les forces qui, respectivement, agissent sur la table (fig. 4.13, a) et sur le livre (fig. 4.13, b) :
— sur la table, le livre repose en exerçant une force $m\vec{g}$ due à son poids : on peut décomposer cette force en deux : $\vec{N}'$ orthogonale à la table et de norme $N' = mg \cos \alpha$, $\vec{T}'$ tangente à la table et de norme $T' = mg \sin \alpha$ ;
— sur le livre, et tant qu'il reste au repos, les forces exercées par la table sont $\vec{N} = -\vec{N}'(N = mg \cos \alpha)$ et $\vec{T} = -\vec{T}'(T = mg \sin \alpha)$; il faut de plus y ajouter la force $m\vec{g}$ mesurant l'action de la pesanteur sur lui.

Il est manifeste que la force qui empêche le livre de glisser est $\vec{T}$ : $\vec{T}$ *représente*, pour l'angle $\alpha < \alpha_c$, *la force de frottement de la table sur le livre* toujours opposée au sens de déplacement éventuel du livre. Cette force est nulle quand $\alpha = 0$, puis elle croît avec $\alpha$ jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur $T_M = mg \sin \alpha_c$, valeur maximum au-delà de laquelle elle ne peut plus croître.

Au moment où $\alpha = \alpha_c$, la réaction normale de la table $\vec{N}$ vaut $N_M = mg \cos \alpha_c$ et, par suite, on a la relation :

$$T_M = N_M \operatorname{tg} \alpha_c. \qquad (4.12)$$

Par définition, le rapport entre la force de frottement maximum $T_M$ à la force normale correspondante $N_M$ est le *coefficient de frottement statique* $f_s$ de la table sur le livre :

$$\boxed{f_s = \frac{T_M}{N_M} = \operatorname{tg} \alpha_c.} \qquad (4.13)$$

La détermination de $f_s$ est aisée : il suffit de mesurer l'angle $\alpha_c$ à partir duquel le livre se met en mouvement. La valeur de $f_s$ dépend naturellement

des matériaux mais aussi de la qualité des surfaces en contact (polies, rugueuses).

On peut, par ailleurs, se demander si le coefficient $f_s$ ne peut pas être mesuré en déterminant la *force* $\vec{F}$ *nécessaire pour mettre le livre en mouvement uniforme sur la table horizontale*, (fig. 4.14, a).

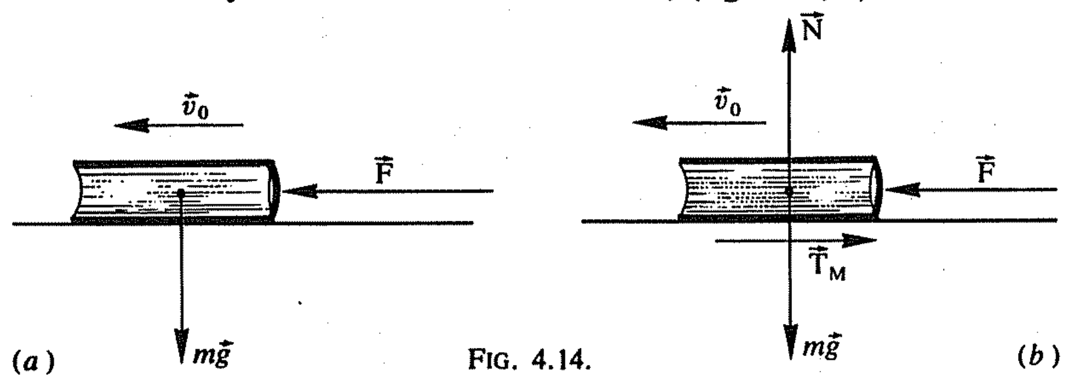



FIG. 4.14.

Afin que le mouvement soit uniforme, il est nécessaire que toutes les forces exercées sur le livre admettent une résultante nulle (fig. 4.14, b) : $\vec{F}$ doit être égale et opposée à la force de friction dont la valeur maximum $T_M$ est atteinte au moment de la mise en mouvement. Posons alors, comme dans le cas statique (4.12) :

$$\boxed{T_M = f_c N \text{ avec } \quad \vec{N} = m\vec{g}.} \tag{4.14}$$

$f_c$, ainsi défini, est le *coefficient de frottement cinétique*. L'examen de la figure 4.13, b montrant que $\vec{N}$ est maximum pour $\alpha = 0$, $N = mg > N_M = mg \cos \alpha_c \longrightarrow f_c < f_s$, résultat que l'expérience confirme, une variation typique de $f_c$ en fonction de $v$ étant représentée sur la figure 4.15. Le tableau 4.1 rassemble quelques valeurs caractéristiques de ces coefficients pour des matériaux divers.

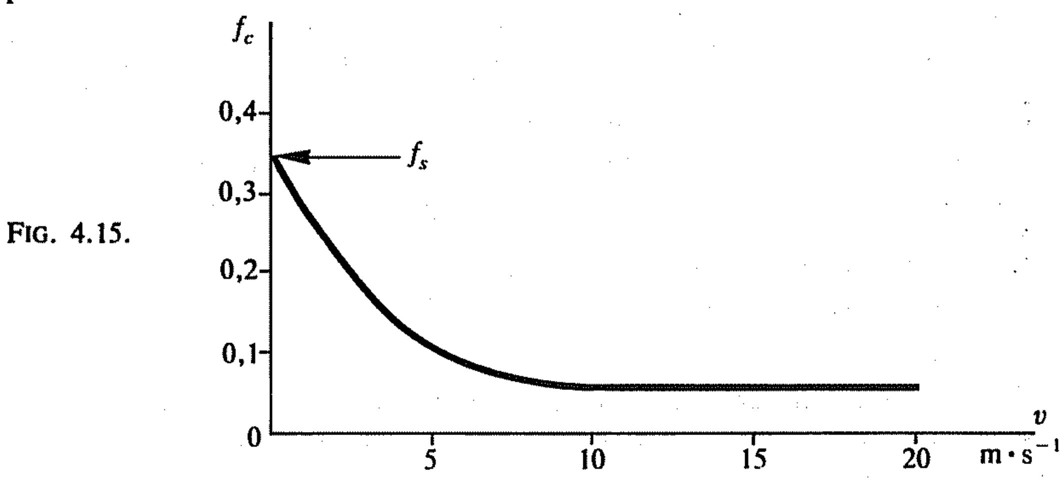



FIG. 4.15.

TABLEAU 4.1.

| Matériaux | $f_s$ | $f_c$ |
|---|---|---|
| Cuivre sur acier doux | 0,53 | 0,36 |
| Téflon sur acier | 0,04 | 0,04 |
| Bois sur brique | 0,3-0,4 | |
| Ski sur neige collante | 0,1 | |
| Ski sur poudreuse | 0,04 | |

## 5.2 Solide sur fluide

Un corps solide se déplaçant dans un fluide (gaz, liquide) subit une force de frottement $\vec{F}_f$ opposée à sa vitesse de déplacement $\vec{v}$. En général, ce phénomène de friction est de grande complexité car il dépend de la vitesse, de la taille et de la forme de l'objet ainsi que de la masse volumique, de la viscosité et de la compressibilité du fluide.

Par exemple, pour une voiture rapide, un avion — se déplaçant à des vitesses $v$ subsoniques — on trouve que : $F_f = kA\rho v^2$, si A désigne l'aire de la section de l'objet perpendiculaire au mouvement, $\rho$ la masse volumique de l'air, $k$ étant un coefficient sans dimension de l'ordre de 1.

Cette force est indépendante de la viscosité du fluide et ceci ne semble pas normal : une bille tombant dans l'eau va plus vite que dans l'huile. Aussi, *aux faibles vitesses*, l'équation ci-dessus doit être remplacée par :

$$\boxed{\vec{F}_f = -K\eta\vec{v},} \tag{4.15}$$

où $\eta$ est le coefficient de viscosité du fluide qui sera défini précisément au chapitre 7; K est un coefficient qui dépend de la forme du corps : pour une sphère de rayon R, on peut montrer qu'il s'écrit :

$$K = 6\pi R. \tag{4.16}$$

K *est donc homogène à une longueur* même si le corps n'est pas sphérique. Dans le cas d'une sphère :

$$\boxed{\vec{F}_f = -6\pi\eta R\vec{v},} \tag{4.17}$$

résultat connu sous le nom de *loi de Stokes*.

Supposons qu'un tel corps se déplace dans un fluide visqueux sous l'action d'*une force constante* $\vec{F}_0$; l'équation dynamique de son mouvement s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_f = \vec{F} - K\eta\vec{v}, \tag{4.18}$$

où $\vec{F}$ apparaît comme la somme de deux termes : $\vec{F}_0$ et la poussée d'Archimède qu'exerce toujours un fluide sur le corps qu'il entoure (voir chapitre 7); cette poussée s'exprime par : $-m_f\vec{g}$ avec $m_f$ la masse du fluide déplacé par le solide.

La somme des deux forces $(\vec{F}_0 - m_f\vec{g})$ étant constante, $\vec{F}$ est donc une force constante. Sous son action, l'accélération $\vec{a}$ au début du mouvement est constante et la vitesse $\vec{v}$ croît avec le temps : par suite, $\vec{F}_f$ croît simultanément d'après (4.15) ce qui entraîne que la résultante $(\vec{F} + \vec{F}_f)$ des forces appliquées au corps diminue et tend vers zéro. Au bout d'un certain temps, le mouvement devient uniforme et la *vitesse atteint une valeur limite* $\vec{v}_L$ que l'on calcule en posant $\vec{a} = \vec{0}$ dans (4.18) :

$$\boxed{\vec{v}_L = \frac{\vec{F}}{K\eta}.} \tag{4.19}$$

*Exemple :* Considérons une goutte de pluie de $10^{-3}$ m de diamètre, tombant dans l'air de masse volumique $\rho_f = 1{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, de

coefficient de viscosité $\eta = 1{,}81 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}}$; la masse volumique de l'eau est $\rho = 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

1° Calcul de la vitesse limite $v_L$ lorsque la goutte tombe dans l'air :
— masse d'une goutte d'eau :

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3;$$

— masse du fluide déplacé :

$$m_f = \rho_f V = \frac{4}{3}\pi\rho_f R^3,$$

$$\longrightarrow \vec{F} = \vec{F}_0 - m_f\vec{g} = (m - m_f)\vec{g} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_f)\vec{g};$$

$$v_L = \frac{F}{K\eta} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3(\rho - \rho_f)g}{6\pi R\eta} = \frac{2R^2(\rho - \rho_f)g}{9\eta} = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2° Calcul de la vitesse à tout instant :

$$m\dot{v} = F - K\eta v \longrightarrow \frac{dv}{v - \frac{F}{K\eta}} = -\left(\frac{K\eta}{m}\right)dt$$

$$\longrightarrow \mathrm{Log}\left(v - \frac{F}{K\eta}\right) = -\left(\frac{K\eta}{m}\right)t + C^{te}; \quad \text{si } v = 0 \text{ quand } t = 0,$$

on aura :

$$v = \left(\frac{F}{K\eta}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{K\eta}{m}t\right)\right].$$

Quand $t \longrightarrow \infty$, on retrouve bien : $v(t = \infty) = v_L = \dfrac{F}{K\eta}\cdot$

3° Calcul du temps de relaxation :
par définition :

$$\tau = \frac{m}{K\eta}; \quad \text{si } t = \tau,\ v_\tau = \frac{F}{K\eta}(1 - e^{-1}) = v_L\left(1 - \frac{1}{e}\right),$$

ceci signifie qu'au bout du temps $\tau$, la vitesse atteinte est égale à 63 % de la valeur de $v_L$. Comme $\tau = \dfrac{m}{K\eta}$, il est aussi peu différent de $\left(\dfrac{v_L}{g}\right)$ puisque $m_f \ll m$, soit dans le cas présent $\tau = 3\mathrm{s}$. Au bout de $4\tau$, c'est-à-dire 12s, la vitesse atteinte par la goutte représente 98 % de sa vitesse limite.

## 6. DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES : LOI DE HOOKE

Quand on applique un effort à un solide immobile, il en résulte en général des déformations plus ou moins réversibles (exemples : étirement d'un fil, compression d'une tige, torsion d'un câble, cisaillement d'une poutre, fracture d'un tibia, etc.).

On dira que l'*interaction* observée est *élastique si les déformations mesurées sont proportionnelles aux forces appliquées* au solide (loi de Hooke); si on supprime la cause (l'effort élastique), on supprime du même coup ses effets (les déformations élastiques) : le solide retrouve son état initial, ce qui justifie le qualificatif d'élastique.

A titre d'illustration d'une déformation élastique, revenons à l'exemple du § 5.1 où un livre repose sur une table horizontale. On peut se demander par quel mécanisme physique la réaction normale $\vec{N}$ de la table s'ajuste exactement à la valeur du poids du livre qu'elle supporte. Schématisons la table par une planche dont les extrémités s'appuient sur deux supports fixes (fig. 4.16, a). Quand on charge cette planche en son milieu, elle s'incurve d'autant plus que la charge est plus lourde (4.16, b) : le support subit une déformation élastique proportionnelle à $m\vec{g}$ ce qui induit *une force de rappel de type élastique, la réaction normale de la table* $\vec{N}$ égale et opposée à $m\vec{g}$. Même si la déformation n'est pas évidente pour l'expérimentateur, il est possible de l'observer grâce à des capteurs sensibles aux déformations (jauges de contrainte) que l'on fixe rigidement sur la table.

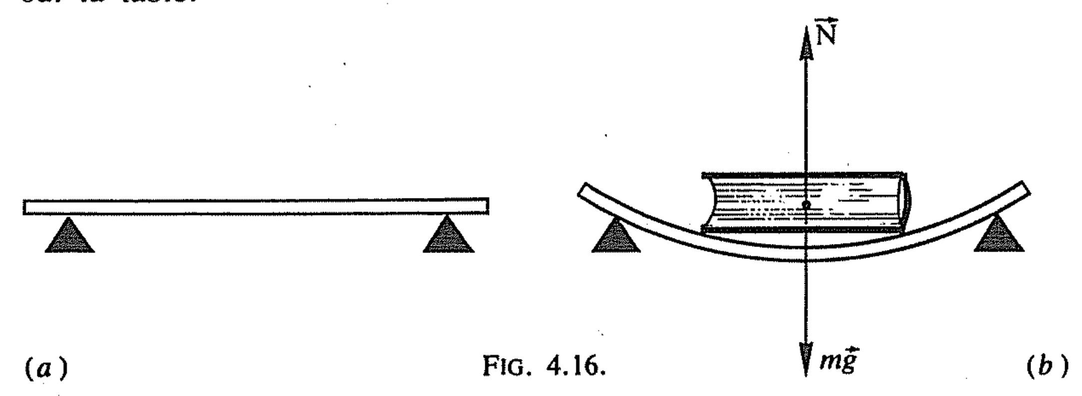



FIG. 4.16.

*Exemples :*

1° Considérons une particule de masse $m$ à l'extrémité libre d'un ressort assujetti à se déplacer selon une droite ($\Delta$). Soit $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$ la position de ce ressort à l'équilibre (fig. 4.17, a) et $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ sa nouvelle position (fig. 4.17, b) quand on exerce un effort $\vec{F}'$ pour amener $m$ de $P_0$ en P (par extension ou compression du ressort).

Si la force de rappel $\vec{F}$ du ressort est élastique, pour un déplacement $\overrightarrow{P_0P} = (\vec{r} - \vec{r}_0)$ et selon la loi de Hooke, on devra écrire :

$$\boxed{\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0), \qquad (k > 0).} \tag{4.20}$$

$k$ mesure la *raideur* du ressort et le signe ( − ) provient de ce que l'effort du ressort sur $m$ est toujours opposé au déplacement. En P, on a $\vec{F}' = -\vec{F}$. Si l'expérimentateur libère la particule ($\vec{F}' = \vec{0}$), son mouvement a pour équation : $m\vec{a} = \vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Posant $k = m\omega^2$,

ceci s'écrit encore : $\vec{a} + \omega^2(\vec{r} - \vec{r}_0)$ avec $\vec{a} = \ddot{(\vec{r} - \vec{r}_0)}$ et nous pouvons affirmer d'après le § 6.2 du chapitre 3 que la masse va osciller sur $(\Delta)$ selon un mouvement sinusoïdal de fréquence angulaire $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

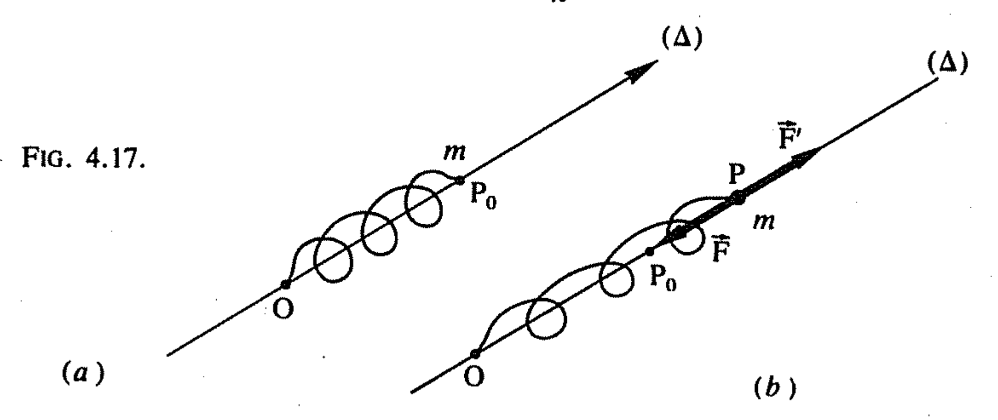



FIG. 4.17.

2° Soit un ressort en spirale dont l'extrémité libre Q est attachée à une tige sans masse OP, de longueur R. En P, on fixe une particule de masse $m$. Si $OP_0$ représente la position d'équilibre de OP, le déplacement $\widehat{P_0P}$ vaut $R\theta$ (fig. 4.18).

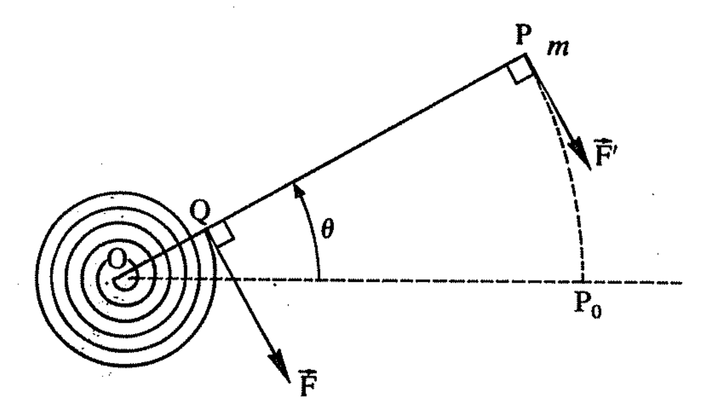



FIG. 4.18.

Soit $\vec{F}$ la force de rappel élastique du ressort, appliquée en Q, normale à OP et contenue dans le plan du ressort. Son moment par rapport à O vaut : $\vec{M}_0 = \vec{OQ} \wedge \vec{F}$ et a pour norme $M_0 = OQ \times F$. Q et P se déplaçant simultanément sur des cercles de rayons respectifs OQ et OP, nous savons (§ 7 du chap. 3) que la force F' appliquée en P a le même moment par rapport à O : $M_0 = OQ \times F = OP \times F' = RF'$. Comme nous devons maintenant exprimer le fait que F' est aussi une force de rappel élastique en posant : $F' = -k\theta$ et $M_0$ étant proportionnel à F', il revient au même d'écrire :

$$\boxed{M_0 = -C\theta, \quad (C > 0),} \tag{4.21}$$

où C est la *constante de torsion* du ressort spiralé. L'équation du mouvement de P en découle :

$$F' = \frac{M_0}{R} = -\frac{C}{R}\theta = ma = mR\ddot{\theta},$$

soit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{mR^2}\,\theta = 0.} \qquad (4.22)$$

Le mouvement de P est donc circulaire (O, R), sinusoïdal, de fréquence angulaire $\omega = \sqrt{\frac{C}{mR^2}}$ et de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{C}}$.

## LES FORCES D'INERTIE

### 7. FORCES D'INERTIE

Soit un référentiel galiléen $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par rapport auquel se translate, selon $\vec{k}$, un référentiel $(O'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (fig. 4.19). *Si* $\vec{V} = \vec{v}_{O'/O}$ *n'est pas un vecteur constant, le référentiel* (O') *n'est pas galiléen; supposons cette condition réalisée.*

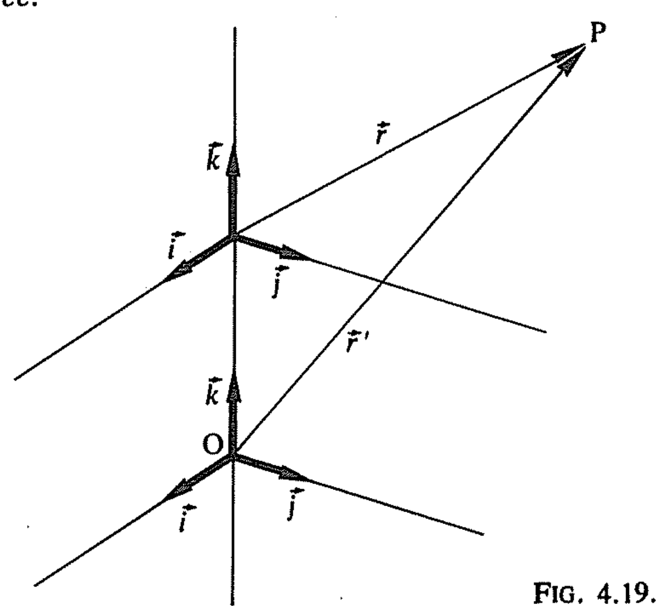



FIG. 4.19.

Considérons une particule P, de masse $m$, observée dans les deux référentiels dont les horloges sont synchrones (invariance du temps). On aura :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \longrightarrow \vec{r} = \vec{r}\,' + \overrightarrow{OO'}.$$

En appliquant à cette relation les raisonnements du § 12 du chapitre 2, on obtient aussi :

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{A} \quad \text{avec : } \vec{A} = \dot{\vec{V}} \neq \vec{0}.$$

Pour l'observateur galiléen (O), les lois de la dynamique entraînent : $m\vec{a} = \vec{F} = m\vec{a}\,' + m\vec{A}$. Posant $\vec{F}' = m\vec{a}\,'$ pour la force appliquée en P et mesurée par l'observateur non-galiléen (O'), il en résulte :

$$\boxed{\vec{F}' = m\vec{a}\,' = \vec{F} - m\vec{A}.} \qquad (4.23)$$

Ainsi $\vec{A} \neq \vec{0}$ implique $\vec{a} \neq \vec{a}'$ et $\vec{F} \neq \vec{F}'$ conformément au principe de relativité (§ 11 du chap. 2) puisqu'un des deux référentiels n'est pas galiléen.

Dans ce dernier, pour l'observateur (O') lié à lui, tout se passe comme si la particule était soumise à deux forces :
— l'une $\vec{F} = m\vec{a}$, la même pour tous les référentiels galiléens;
— l'autre $\vec{\mathcal{F}} = -m\vec{A}$ due au mouvement relatif non-galiléen de (O') par rapport à (O), force qui disparaît si ce mouvement relatif devient rectiligne uniforme $(\vec{A} = \vec{0})$.

Une telle force, étroitement liée à $\vec{A}$, est appelée *force d'inertie, pseudo-force* ou *force fictive;*
— l'appellation force d'inertie apparaîtra comme évidente dans l'exemple 1 *a* ci-après;
— le vocable pseudo-force se réfère au fait que $\vec{\mathcal{F}}$ n'existe pas dans les référentiels galiléens, les seuls où le principe de relativité s'applique;
— dire que la force d'inertie est fictive est malheureux : pour l'observateur (O'), elle est réelle et manifeste notamment sa présence par les déformations élastiques des systèmes entraînés avec (O') : par exemple, si l'accélération $\vec{A}$ dirigée vers le haut est grande, le sang peut s'accumuler (par inertie) dans la région inférieure du corps provoquant ainsi une anémie temporaire de la rétine et du cerveau.

*Exemples :*

1° Soit P, de masse $m$, soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. Pour l'observateur (O) sur la Terre, supposée être un référentiel galiléen : $\vec{F} = m\vec{g}$. Si maintenant, P immobile dans (O') se déplace par rapport à la Terre avec une accélération verticale $\vec{A} = n\vec{g}$, il lui semble être soumis à une interaction de gravitation mesurée par la force :

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{A} = m(1-n)\vec{g}.$$

*a*) Si (O') est une fusée ou un ascenseur qui s'éloigne de la Terre, $\vec{A} = -n'\vec{g}$ entraîne $-n = n' > 0$ d'où : $\vec{F} = m(1+n')\vec{g}$. Le poids apparent de P dans sa fusée vaut $(n+1)$ fois celui qu'il a sur Terre;

*b*) si (O') est un ascenseur qui tombe en chute libre vers la Terre, $\vec{A} = \vec{g} \longrightarrow n = 1$ d'où : $\vec{F}' = \vec{0}$. Le passager est en état d'*apesanteur.*

2° Nous savons qu'un référentiel en rotation n'est pas galiléen : il doit y apparaître des forces d'inertie. Considérons une particule P, de masse $m$, décrivant d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\omega_0$ le cercle (O', R). Pour un observateur (O) situé sur Terre, référentiel supposé galiléen, la particule est soumise à une *force centripète* :

$$\vec{F} = m\omega_0^2 R\vec{u}_N,$$

$\vec{u}_N$ étant le vecteur unitaire de la normale principale PO' (fig. 4.20).

Pour un observateur entraîné avec la particule (par exemple (O') qui tourne avec (O'; $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$) à la vitesse angulaire $\omega_0$ où (P) lui-même puisque $\overrightarrow{O'P} = R\vec{i}'$ est fixe dans (O'; $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$)), P semblera immobile donc en équilibre, la résultante des forces qui lui sont appliquées dans le référentiel en rotation étant nulle; nous devons donc écrire :

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{\mathcal{F}} = \vec{0},$$

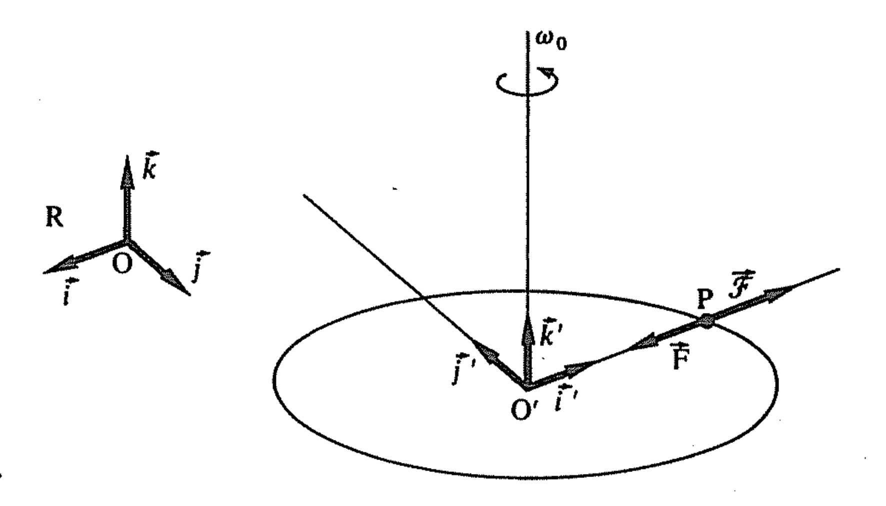



FIG. 4.20.

soit : $$\vec{\mathscr{F}} = -m\omega_0^2 R\vec{u}_N. \qquad (4.24)$$

Cette force d'inertie, qui apparaît dans un mouvement de rotation, est la *force centrifuge.*

*a*) Considérons un satellite terrestre habité de masse $m$; pour l'observateur, immobile dans ce satellite, son équilibre s'exprime par :

$$\vec{F}' = \vec{0} = \vec{F} + \vec{\mathscr{F}} = \gamma \frac{mM}{R^2}\vec{u}_N - m\omega_0^2 R\vec{u}_N,$$

puisque, pour l'observateur terrestre, $\vec{F}$ mesure l'interaction de gravitation Terre-satellite. Il s'en suit, en posant $v = \omega_0 R$ :

$$\gamma \frac{M}{R^2} = \frac{v^2}{R} \longrightarrow v^2 = \gamma \frac{M}{R} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}.$$

Comme la période de révolution $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{\gamma M}}$, en élevant au carré, on obtient : $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\gamma M}\right) R^3$, cas particulier de la troisième loi de Kepler relative au mouvement des planètes autour du Soleil (§ 1 du chap. 4). Il est possible de déduire de ce résultat l'altitude $h$ d'un satellite « géostationnaire » c'est-à-dire semblant immobile par rapport à la Terre; sa période de rotation étant celle de la Terre : $T = 24 \times 3\,600$ s, on trouve $R = 42\,200$ km; si le rayon de la Terre $R_0$ vaut 6 370 km, on a $h = R - R_0 = 35\,800$ km.

*b*) Dans une centrifugeuse tournant à 500 Hz, une masse de $10^{-3}$ kg décrivant une circonférence de rayon 0,1 m subit une force centrifuge de $10^3$ N soit $10^5$ fois supérieure à l'action du champ de pesanteur. Sous l'effet de cette force très intense, une particule en suspension dans un fluide est rapidement projeté sur le pourtour de la centrifugeuse, sa vitesse de sédimentation ayant été considérablement accrue.

# 5

# APPLICATIONS DE LA DYNAMIQUE

## 1. MOUVEMENT D'UNE CHARGE ÉLECTRIQUE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME. OSCILLOSCOPE

D'après le § 4 du chapitre 4, l'équation dynamique du mouvement d'une charge électrique $q$, de masse $m$, dans un champ électrique $\vec{E}$ en un endroit où le champ de pesanteur est $\vec{g}$, s'écrit :

$$m\vec{a} = q\vec{E} + m\vec{g} \longrightarrow \vec{a} = \left(\frac{q}{m}\right)\vec{E} + \vec{g}. \qquad (5.1)$$

L'accélération $\vec{a}$ dépend donc du rapport $\frac{q}{m}$ : comme ce rapport n'est pas le même pour toutes les particules (électrons, protons, anions, cathions), les accélérations et par suite les déviations éventuelles ne seront pas les mêmes, toutes choses étant égales par ailleurs.

Examinons ici le cas d'une particule chargée pénétrant dans une région de l'espace où existe un champ électrique uniforme $\vec{E}_0$; supposons de plus, pour simplifier, que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la particule est orthogonale au support du champ $\vec{E}_0$.

Montrons tout d'abord que la force de pesanteur $mg$ est négligeable devant la force électrostatique : une valeur typique pour $E_0$ est $10^4$ N·C$^{-1}$; avec un électron ($e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg), nous voyons que : $|e\,E_0| = 1{,}6 \cdot 10^{-15}$ N $\gg m_e g \sim 9{,}1 \cdot 10^{-30}$ N. L'équation (5.1), dans le cas présent, se réduit donc à :

$$m\vec{a} = q\vec{E}_0.$$

Appelons O$x$ la direction de l'espace parallèle à $\vec{v}_0$ et O$y$ celle parallèle à $\vec{E}_0$ (fig. 5.1) : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$ implique :

$$\left| \begin{array}{l} m\ddot{x}\vec{i} = \vec{0}, \\ m\ddot{y}\vec{j} = q\,E_0\vec{j}. \end{array} \right.$$

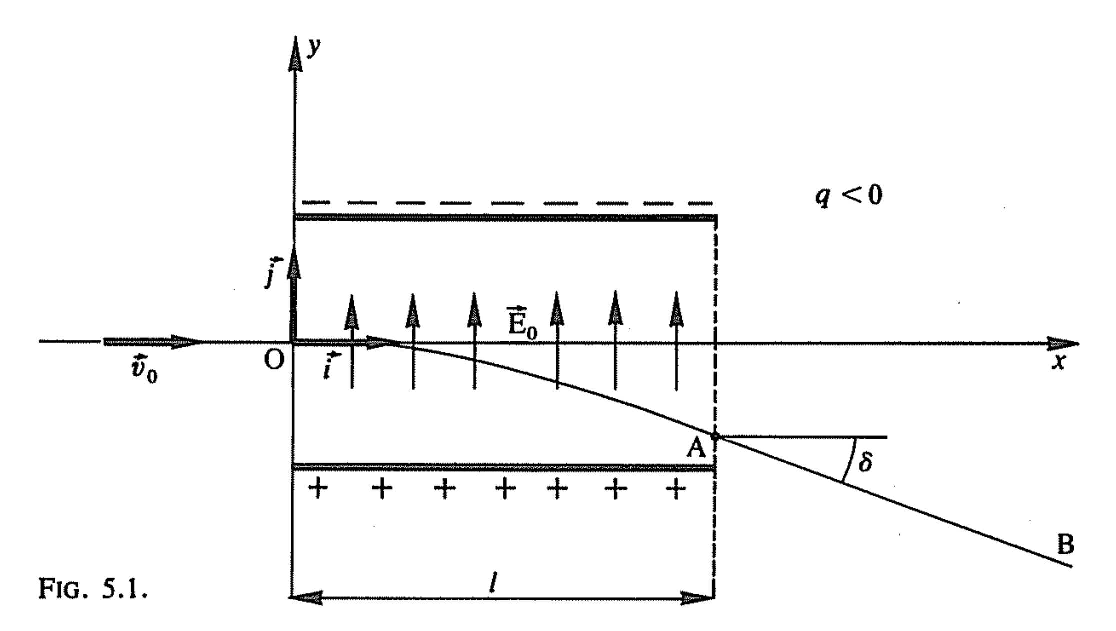



FIG. 5.1.

Si l'origine du temps $t$ est prise à l'instant où la particule pénètre en O dans le champ $\vec{E}_0$, nous en déduisons, par intégrations successives :

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = \frac{q}{m}\,E_0,$$

$$\dot{x} = v_0, \qquad \dot{y} = \frac{q}{m}\,E_0 t,$$

$$x = v_0 t, \qquad y = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\,E_0 t^2.$$

Le mouvement selon O$x$ est un mouvement uniforme

$$(\vec{a}_x = \vec{0} \longrightarrow \vec{v} = \vec{v}_0)$$

et selon O$y$, c'est un mouvement uniformément accéléré $\left(\vec{a}_y = \frac{q}{m}\,\vec{E}_0\right)$ dont le sens dépend du signe de $q$ : si $q > 0$ déplacement selon $\vec{E}_0$, si $q < 0$ déplacement selon $-\vec{E}_0$. La trajectoire est un morceau de parabole, puisqu'en éliminant $t$ entre $x$ et $y$ on a :

$$y = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{E_0}{v_0^2}\,x^2.$$

Après traversée du champ $\vec{E}_0$ et déviation, la particule redevient quasi-libre (au champ de pesanteur près) et décrit donc une droite AB d'un mouvement uniforme pour lequel il est aisé de calculer la vitesse $v_1$ si on connaît la longueur $l$ du champ déflecteur dans la direction O$x$ :

$$v_1^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)_{t = l/v_0} = v_0^2 + \left(\frac{q}{m}\,E_0\,\frac{l}{v_0}\right)^2,$$

l'angle de déviation $\delta$ se déduisant de :

$$\mathrm{tg}\delta = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)_{t = l/v_0} = \frac{q}{m}\,E_0\,\frac{l}{v_0^2}.$$

Les propriétés ci-dessus sont mises en pratique dans les oscilloscopes et les tubes de télévision (fig. 5.2). Un tel instrument est constitué essentiellement :

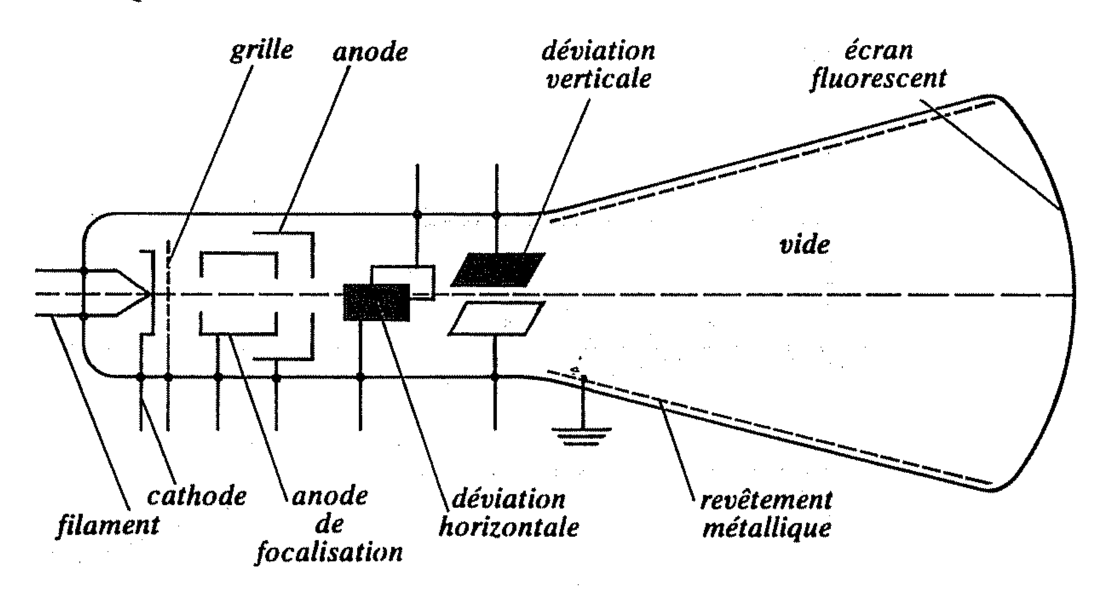


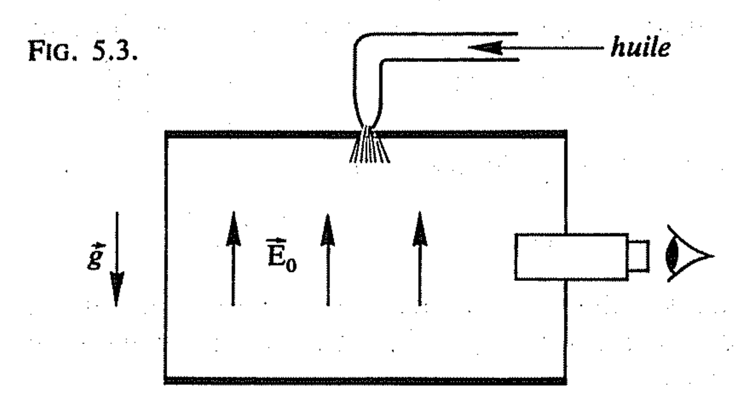

FIG. 5.2.

— d'un canon à électrons formé d'une cathode à chauffage indirect, d'une grille commandant la luminosité, d'une anode focalisant le faisceau d'électrons et d'une anode accélératrice;
— de deux condensateurs à plaques parallèles : ils servent à produire deux champs électriques mutuellement orthogonaux et dont les intensités sont commandées par les différences de potentiel appliquées à chaque condensateur : sous leur action respective, le faisceau d'électrons peut être déplacé dans toutes les directions de l'espace;
— d'un tube en verre où règne un vide poussé et renfermant les éléments ci-dessus. Les électrons manifestant leur existence par un impact sur l'écran fluorescent, on peut ainsi suivre leur évolution spatio-temporelle; un revêtement métallique interne sert de blindage vis-à-vis des champs électriques externes et permet aux électrons de l'écran de s'écouler à l'extérieur du tube.

## 2. L'EXPÉRIENCE DE MILLIKAN

Au § 2 du chapitre 4, nous avons dit que la charge électrique est *quantifiée* c'est-à-dire se présente toujours comme un multiple entier d'une charge élémentaire ou *quantum*. De nombreuses expériences ont confirmé cette assertion, la plus connue étant celle de Millikan (1917).

FIG. 5.3.



Entre deux plaques parallèles (fig. 5.3), on établit un champ électrique uniforme vertical $\vec{E}_0$; la plaque supérieure est percée en son centre et permet l'introduction de fines gouttelettes d'huile produites par un vaporisateur : la plupart d'entre elles se chargent électriquement par friction, soit à la sortie du vaporisateur, soit au contact de la plaque supérieure.

Le champ $\vec{E}_0$ étant coupé, les gouttes tombent sous l'action de $\vec{g}$ et sont freinées par l'air contenu entre les deux plateaux; la vitesse limite $v_1$ (§ 5.2 du chap. 4) d'une goutte de rayon $r$ est :

$$v_1 = \frac{(m - m_a)g}{6\pi\eta r} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3 g(\rho - \rho_a)}{6\pi\eta r} = \frac{2r^2(\rho - \rho_a)g}{9\eta},$$

où $\rho$ et $\rho_a$ sont les masses volumiques respectives de l'huile et de l'air, et $\eta$ est le coefficient de viscosité de l'air.

Supposons que la goutte porte une charge $q$ et qu'on applique le champ $\vec{E}_0$ vers le haut; son équation dynamique devient :

$$m\vec{a} = q\vec{E}_0 + (m - m_a)\vec{g} - 6\pi r\eta\vec{v}.$$

Sa nouvelle vitesse limite devient :

$$v_2 = \frac{q\,E_0 - (m - m_a)g}{6\pi\eta r} = \frac{q\,E_0}{6\pi\eta r} - v_1,$$

d'où il résulte :

$$q = \frac{6\pi\eta r}{E_0}(v_1 + v_2).$$

La mesure de $v_1$ donne $r$, puis celle de $v_2$ conduit à $q$ en valeur algébrique. En répétant de très nombreuses fois l'expérience avec des gouttes de rayon et de charge variables, l'idée de quantification de la charge électrique s'est imposée; $q$ apparaît toujours comme un multiple entier de la charge élémentaire :

$$\boxed{e = 1{,}602\,1 \cdot 10^{-19}\ \text{C}.}$$

A cette charge électrique, des expériences comme celle décrite au § 1 associent toujours une masse donnée : la particule ainsi définie par sa *masse* et sa *charge* est alors une *particule élémentaire fondamentale.* Parmi toutes celles identifiées par le physicien, nous ne citerons que les plus courantes :

— l'électron $q = -e$ $\quad m_e = 9{,}109\,1 \cdot 10^{-31}$ kg
— le proton $q = +e$ $\quad m_p = 1{,}672\,5 \cdot 10^{-27}$ kg
— le neutron $q = 0$ $\quad m_n = 1{,}674\,8 \cdot 10^{-27}$ kg.

Notons que $\frac{m_e}{m_p} = \frac{1}{1\,840}$ : *la masse du proton est* 1 840 *fois celle de l'électron* et que dans un coulomb il y a $\frac{1}{1{,}602\,1 \cdot 10^{-19}} = 6{,}24 \cdot 10^{18}$ charges élémentaires.

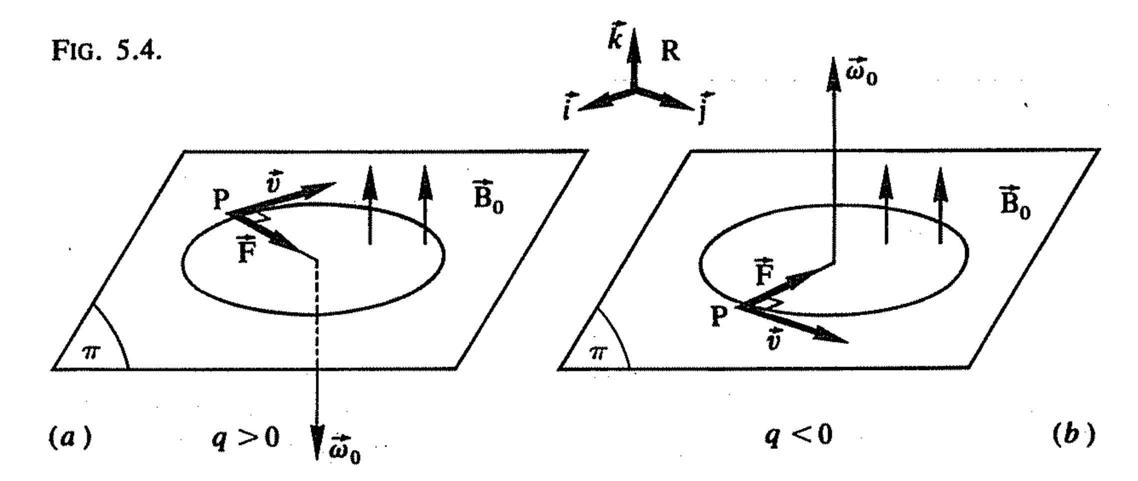
## 3. MOUVEMENT D'UNE CHARGE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME

Considérons un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$ et une particule P($m$, $q$) dont la vitesse $\vec{v}_0$, au moment où elle pénètre dans le champ, a son support orthogonal à celui de $\vec{B}_0$. La force mesurant l'interaction magnétique : $F = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ est toujours orthogonale à $\vec{v}$ ; ceci entraîne :

$$\forall t,\ F_T = \frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow v = v_0 \quad \text{et} \quad |F| = |qv_0B_0| = |F_N| = \frac{mv_0^2}{\rho}. \tag{5.2}$$

La particule décrit d'un mouvement uniforme de vitesse $v_0$ une trajectoire circulaire de rayon $\rho = \left|\frac{m}{q}\frac{v_0}{B_0}\right|$ dont le plan ($\pi$) est perpendiculaire au vecteur induction magnétique $\vec{B}_0$. Les figures 5.4, a et b montrent les deux cas à considérer selon le signe de $q$.

FIG. 5.4.




Le mouvement étant circulaire uniforme, la norme de la vitesse angulaire est donnée par : $|\omega_0| = \frac{|v_0|}{\rho} = \left|\frac{q}{m} B_0\right|$. L'examen des figures ci-dessus montre de plus, que le sens de rotation de P dépend de $q$, ce qui se traduit par la relation vectorielle :

$$\vec{\omega}_0 = -\frac{q}{m}\vec{B}_0. \tag{5.3}$$

Pour une vitesse $\vec{v}_0$ donnée, le sens de courbure (à gauche ou à droite) de la trajectoire décrite par P détermine sans ambiguïté le signe de sa charge.

Si $\vec{v}_0$ n'est pas orthogonal à $\vec{B}_0$ quand la particule entre dans le champ, on écrit $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0,\,/\!/} + \vec{v}_{0,\,\perp}$, $\vec{v}_{0,\,/\!/}$ étant la vitesse initiale parallèle à $\vec{B}_0$ et $\vec{v}_{0,\,\perp}$ la vitesse initiale orthogonale à $\vec{B}_0$ : le principe de superposition implique alors que P décrit une trajectoire hélicoïdale d'un mouvement uniforme (composition d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_{0,\,/\!/}$ orthogonal à un mouvement circulaire uniforme de vitesse $\vec{v}_{0,\,\perp}$).

Citons comme applications courantes de l'interaction magnétique sur les particules chargées :
— les accélérateurs de particules tels les cyclotrons;

— les chambres à hydrogène pour la détection des particules élémentaires;
— les spectromètres de masse utilisés dans l'analyse chimique de substances préalablement ionisées.

## 4. OSCILLATIONS D'UN PENDULE SIMPLE

Considérons une particule P, de masse $m$, suspendue à un fil sans masse ni raideur et de longueur $l$. Abandonnons ce système dans un plan vertical après l'avoir écarté de sa position d'équilibre qui est celle de la verticale du lieu O$x$ : l'expérience montre, si elle ne dure pas trop longtemps, que ce *pendule simple* oscille dans un plan vertical $x$O$y$ en décrivant un arc de cercle de rayon $l$ (fig. 5.5).

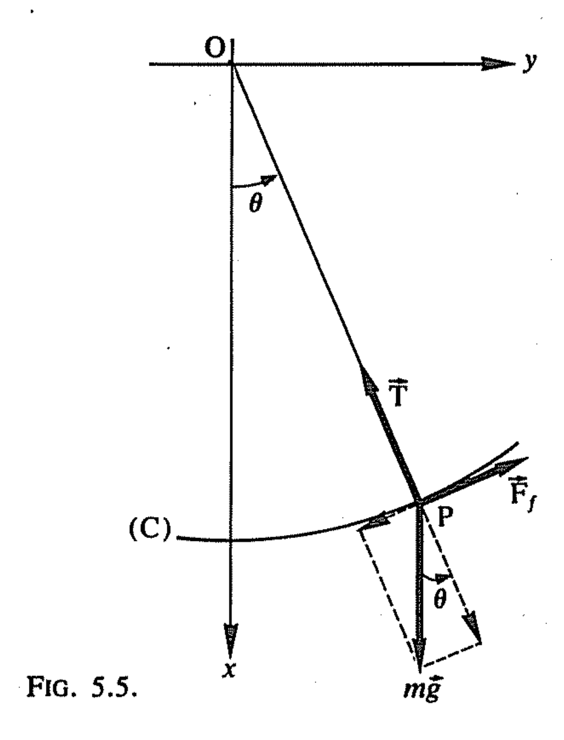



FIG. 5.5.

Nous allons étudier ce mouvement dans deux cas : le premier où la friction de l'air ambiant est négligée, le deuxième où nous la prendrons en considération.

### 4.1 Pendule simple sans friction $(\vec{F}_f = \vec{0})$

Soit $\theta = (Ox, \overrightarrow{OP})$ l'angle orienté que fait $\overrightarrow{OP}$ avec la verticale O$x$; écrivons les lois du mouvement relatives aux accélérations tangentielle $\vec{a}_T$ et normale $\vec{a}_N$ en notant que les forces qui interviennent sont le poids $m\vec{g}$ de P et la tension $\vec{T}$ du fil sur P :

$$m\vec{a}_T = m\ddot{s}\vec{u}_T = -mg\sin\theta\vec{u}_T,$$
$$m\vec{a}_N = \frac{mv^2}{l}\vec{u}_N = T\vec{u}_N - mg\cos\theta\,\vec{u}_N,$$

système d'équations qui s'écrit encore, si l'on tient compte que $s = l\theta \longrightarrow \ddot{s} = l\ddot{\theta}$ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \quad T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{l}.$$

La première équation une fois intégrée donne $\theta(t)$ ou $s(t) = l\theta(t)$ c'est-à-dire la loi du mouvement, la seconde fournit l'expression de la tension du fil sur la particule.

La résolution de ce système est aisée si on se contente d'écarter faiblement le pendule de sa position d'équilibre, c'est-à-dire dans le cas des *oscillations aux petits angles :*

$$\theta \leqslant 10^{-1} \text{ radian} \longrightarrow \sin\theta \sim \theta, \ \cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

Dans ces conditions, il s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad T = mg + m\frac{v^2}{l}. \tag{5.4}$$

Le mouvement de P est un mouvement sinusoïdal circulaire (souvent appelé mouvement harmonique), d'équation horaire $s = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ ou $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$ et de période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. *Aux faibles amplitudes d'oscillation, la période* T *d'un pendule simple est indépendante de la masse de ce pendule et proportionnelle à sa longueur l*; tous les pendules de même longueur ont la même période : ceci exprime l'*isochronie* du pendule simple aux petits angles.

La tension T équilibre le poids de la particule P et fournit la force centripète $\frac{mv^2}{l}$ nécessaire pour maintenir P sur sa trajectoire circulaire.

### 4.2 Pendule simple avec friction $(\vec{F}_f \neq \vec{0})$

Supposons maintenant que la particule P soit soumise à une force de friction $\vec{F}_f = -k\vec{v}$; alors :

$$m\vec{a}_T = m\ddot{s}\vec{u}_T = -mg\sin\theta\vec{u}_T - k\dot{s}\vec{u}_T \qquad \text{et} \qquad s = l\theta$$

entraînent :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Pour les oscillations aux petits angles :

$$\sin\theta \# \theta$$

et :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{5.5}$$

Cette équation du mouvement remplace l'équation correspondante (5.4) du pendule sans frottement. Posant : $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, $\tau_0 = \frac{m}{k}$, elle s'écrit encore :

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0. \tag{5.6}$$

L'expérience montre que, dans ces conditions, le pendule est amorti parce que freiné par une force opposée à sa vitesse : l'amplitude des oscillations diminue quand le temps croît. Comme la fréquence angulaire est peut-être aussi modifiée par l'amortissement, nous envisageons une solution de la forme : $\theta(t) = \Theta(t)\sin(\omega t + \varphi)$ respectant l'allure oscillante du pendule sans rien préjuger de son amplitude et de sa fréquence. Alors :

$$\dot{\theta} = \dot{\Theta}\sin(\omega t + \varphi) + \omega\Theta\cos(\omega t + \varphi),$$
$$\ddot{\theta} = \ddot{\Theta}\sin(\omega t + \varphi) + 2\omega\dot{\Theta}\cos(\omega t + \varphi) - \omega^2\Theta\sin(\omega t + \varphi),$$

portés dans (5.6) donnent :

$$\left[\ddot{\Theta} + \frac{\dot{\Theta}}{\tau} + (\omega_0^2 - \omega^2)\Theta\right]\sin(\omega t + \varphi) + \left[2\dot{\Theta} + \frac{1}{\tau}\Theta\right]\omega\cos(\omega t + \varphi) = 0,$$

relation vraie, quel que soit $t$. Ceci sera vérifié si, simultanément :

$$\ddot{\Theta} + \frac{\dot{\Theta}}{\tau} + (\omega_0^2 - \omega^2)\Theta = 0 \quad \text{et} \quad 2\dot{\Theta} + \frac{1}{\tau}\Theta = 0.$$

La seconde relation s'intègre sans difficulté :

$$d\Theta = \dot{\Theta}\,dt \rightarrow d\Theta = -\frac{1}{2\tau}\Theta\,dt \rightarrow \frac{d\Theta}{\Theta} = \frac{-dt}{2\tau} \rightarrow \Theta = \theta_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right).$$

*L'amplitude* $\Theta$ *du mouvement oscillant décroît avec le temps et est divisée par e au bout d'une durée égale au temps caractéristique* $2\tau$ *:* ce résultat est bien conforme à l'amortissement attendu.

De plus : $\dot{\Theta} = -\dfrac{\Theta}{2\tau}$ et $\ddot{\Theta} = \dfrac{\Theta}{4\tau^2}$, portés dans la première relation, donnent :

$$\left(\frac{1}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau^2} + \omega_0^2 - \omega^2\right)\Theta = \left(\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} - \omega^2\right)\Theta = 0,$$

soit :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\dfrac{2\pi}{\omega_0}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4\omega_0^2\tau^2}}},$$

c'est-à-dire :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{T_0}{4\pi\tau}\right)^2}}.$$

La période d'oscillation $T_0$ de l'oscillateur non-amorti est donc perturbée par l'amortissement selon la loi ci-dessus ($T \geqslant T_0$).

L'ensemble des résultats pour les deux oscillateurs se trouvent rassemblés sur la figure 5.6. L'amortissement est faible quand $\tau \gg T_0$; si $\tau$

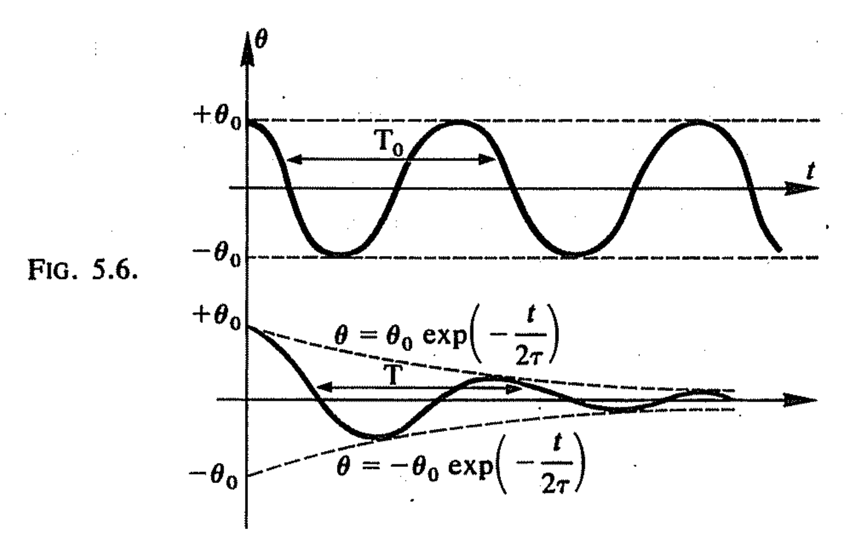



FIG. 5.6.

est assez petit, $\frac{1}{\tau}$ grandit et $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}$ peut devenir nul, voire même négatif. Pour $\omega_0 = \frac{1}{2\tau}$, ou $\tau = \frac{T}{4\pi}$, alors $\omega = 0$ et on est à *l'amortissement critique.* Il est aisé de vérifier que la solution de (5.6) pour ce cas particulier est : $\theta = \theta_0(1 + \alpha t) \exp\left(\frac{-t}{2\tau}\right)$, $\alpha$ étant une constante dépendant des conditions initiales. Le graphe correspondant (fig. 5.7) montre que le pendule n'oscille pas mais retourne doucement à sa position d'équilibre.

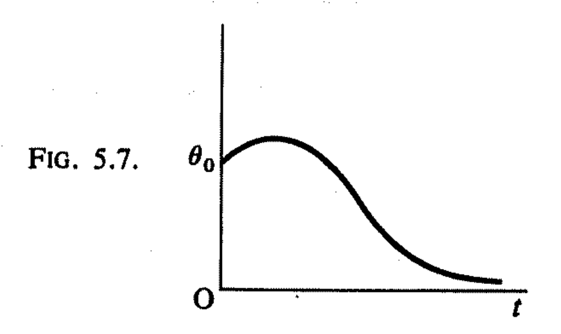



FIG. 5.7.

Concluons ce paragraphe en signalant que le mouvement harmonique avec amortissement se retrouve dans de très nombreux phénomènes physiques en particulier en mécanique, acoustique, optique, électromagnétisme, physique atomique et moléculaire.

## 5. CONDITIONS D'UN ÉQUILIBRE STATIQUE

Chercher les conditions que doivent satisfaire les forces extérieures agissant sur un corps rigide de manière à ce qu'il soit en équilibre, dans le champ de forces en interaction avec lui, n'est pas un problème trivial.

Pour une particule — c'est-à-dire un corps de taille négligeable — il suffit d'écrire que la résultante des forces agissant sur elle est nulle : ceci résulte de la seconde loi de Newton appliquée à l'ensemble des forces (§ 4

du chap. 3), car si le corps est en *équilibre statique* dans un référentiel galiléen, sa vitesse y est nulle, ce qui entraîne :

$$\vec{v} = \vec{0} \longrightarrow \vec{a} = \vec{0} \longrightarrow m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{R} = \vec{0}.$$

Réciproquement, il existe toujours un référentiel galiléen où $\vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{R} = \vec{0}$ et où le corps, étant immobile, est en équilibre.

*Pour un corps* d'une certaine extension ou un *système de particules, cette condition ne suffit pas,* car à la *translation* du corps se superpose sa *rotation* éventuelle. Or nous avons vu (§ 7 du chap. 3) qu'une particule P ne peut tourner autour d'un point O sous l'action d'une force $\vec{F}$ que si le moment de la force : $\vec{M}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$, n'est pas nul $\left(\vec{M}_0 = \vec{O}\right.$ si et seulement si $\overrightarrow{OP} = \vec{O}$ ou $\vec{F} = \vec{O}$ ou $\overrightarrow{OP} /\!/ \vec{F}$, trois cas écartant une rotation éventuelle$\left.\right)$. La généralisation est immédiate : si un solide ou un système de particules $P_i$ tournent autour d'un point O, sous l'action de forces extérieures $\vec{F}_i$, la résultante de leur moment : $\vec{M}_0 = \sum_i \vec{M}_0^i = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_i$, est non nulle. Alors, il y aura *équilibre* du point de vue de la rotation *si ce moment total est nul.*

On peut toutefois se demander si le choix du point O, sur l'axe de rotation du corps, n'est pas une condition restrictive : considérons alors O′ quelconque dans (O; $\mathcal{E}$) :

$$\vec{M}_0 = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_i = \sum_i (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_i}) \wedge \vec{F}_i = \overrightarrow{OO'} \wedge \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \overrightarrow{O'P_i} \wedge \vec{F}_i;$$

comme le corps est en équilibre,

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \vec{M}_0 = \vec{0},$$

et nous obtenons finalement :

$$\vec{M}_{0'} = \sum_i \overrightarrow{O'P_i} \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_0 = \vec{0}.$$

Le choix du point par rapport auquel on calcule la somme des moments des forces extérieures est donc arbitraire : on le prendra de manière à simplifier autant que possible les calculs.

En résumé, les conditions générales d'équilibre statique d'un corps rigide ou d'un système de points $P_i$ dans un champ de forces extérieures $\vec{F}_i$ sont :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \vec{M}_0 = \sum_i \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_i = \vec{0} \quad (\forall O). \qquad (5.7)$$

*Remarque :* Dans ces conditions, *les forces intérieures* $\vec{F}_{ij}$ *mesurant les interactions mutuelles des particules* $P_i$ *et* $P_j$ du système ou du corps solide n'*ont pas à être prises en compte.* En effet, à cause de la loi de

l'action et de la réaction (fig. 5.8) on a : $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \longrightarrow \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}$ ce qui ne modifie pas la résultante $\vec{R}$ de l'ensemble des forces. De même : $\overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_{ij} + \overrightarrow{OP_j} \wedge \vec{F}_{ji} = (\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP_j}) \wedge \vec{F}_{ij} = (\overrightarrow{P_jO} + \overrightarrow{OP_i}) \wedge \vec{F}_{ij} = \overrightarrow{P_jP_i} \wedge \vec{F}_{ij} = \vec{0}$ puisque $\vec{F}_{ij}$ et $\vec{F}_{ji}$ colinéaires de $\overrightarrow{P_iP_j}$ ; le moment total de toutes les forces ne sera donc pas modifié.

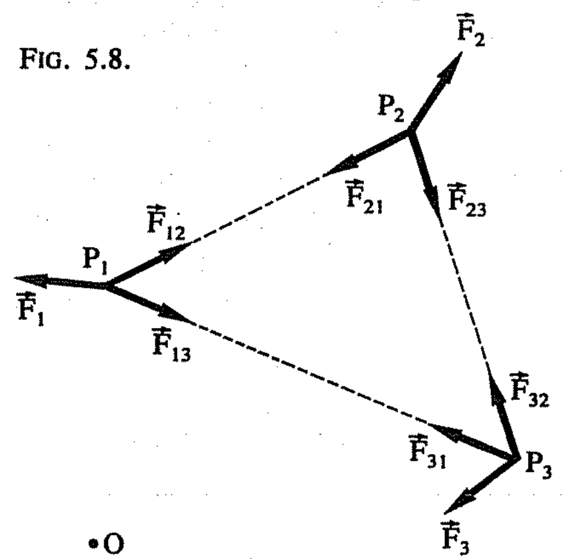



FIG. 5.8.

# 6. LE CENTRE DE MASSE D'UN SYSTÈME DE PARTICULES

## 6.1 Définition et propriétés

Soit un système de particules $P_i$, de masses $m_i$, situées à l'extrémité des vecteurs $\vec{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$ (fig. 5.9). La quantité de mouvement totale de ce système s'écrit (§ 4 du chap. 3) :

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \dot{\overline{\left(\sum m_i \vec{r}_i\right)}}. \tag{5.8}$$

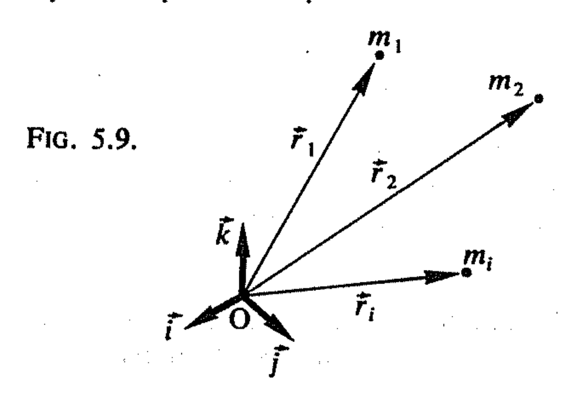



FIG. 5.9.

Définissons le *centre de masse* du système par la position C de la particule, de masse $M = \sum_i m_i$, telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}.} \tag{5.9}$$

*La position de* C *est une propriété intrinsèque du système de particules,* car sa définition est indépendante du choix de l'origine O du référentiel R; écrivons en effet que O′ est la nouvelle origine de R :

$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'_C$$

et $$\vec{r}_i = \overrightarrow{OP}_i = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}_i = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}_i$$

entraînent : $$\vec{r}_C = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_i m_i\left(\overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'_i\right)$$

$$= \overrightarrow{OO'}\left(\frac{\sum_i m_i}{M}\right) + \sum_i m_i\vec{r}\,'_i = \overrightarrow{OO'} + \sum_i m_i\vec{r}\,'_i,$$

puisque $M = \sum m_i$; C est défini par rapport à (O′; $\mathcal{E}$) de la même manière que par rapport à (O; $\mathcal{E}$).

Pour un corps solide, la définition (5.9) doit être appliquée à toutes les masses élémentaires d$m$ situées aux extrémités de tous les vecteurs $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ et étendue à toutes les particules constituant le solide de volume $\mathcal{V}$ (fig. 5.10). On obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{OC} = \frac{\int_{\mathcal{V}} \vec{r}\,\mathrm{d}m}{M}.} \qquad (5.10)$$

FIG. 5.10.

Si maintenant dans (5.8) nous remplaçons $\sum_i m_i\vec{r}_i$ par $M\vec{r}_C$, nous obtenons :

$$\vec{P} = \dot{\overbrace{\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)}} = M\dot{\vec{r}}_C = M\vec{v}_C, \qquad (5.11)$$

et la seconde loi de Newton permet finalement d'écrire :

$$\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}} = M\dot{\vec{v}}_C = M\vec{a}_C.} \qquad (5.12)$$

*Ainsi le centre de masse* C *se déplace comme si la somme de toutes les interactions lui était appliquée.* Ceci explique le mouvement de translation apparent d'un objet de forme quelconque (clé à molette, ballon de rugby, etc.) dans le champ de pesanteur : son centre de masse décrit une trajectoire parabolique.

Une autre propriété importante du *centre de masse* C est d'être *le point par rapport auquel un corps solide peut être maintenu en équilibre dans le champ de pesanteur.*

Calculons le moment résultant de toutes les forces de pesanteur appliquées à toutes les particules $P_i$ :

$$\vec{M}_0 = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i\vec{g} = \left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right) \wedge \vec{g} = M\vec{r}_C \wedge \vec{g} = \vec{r}_C \wedge M\vec{g} = \vec{r}_C \wedge \vec{R}.$$

Nous voyons qu'il est égal au moment de la résultante des forces extérieures $\vec{R} = M\vec{g}$ appliquée en C.

Considérons en C une force $\vec{R}'$ égale et opposée à $\vec{R}$ (fig. 5.11) : son moment par rapport à O vaut :

$$\vec{M}'_0 = \vec{r}_C \wedge \vec{R}' = -\vec{r}_C \wedge \vec{R} = -\vec{M}_0.$$

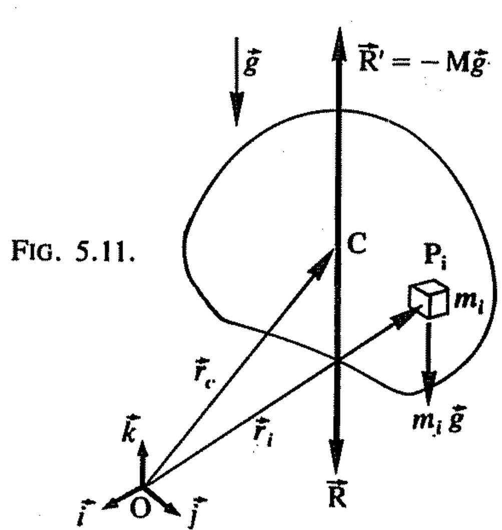



FIG. 5.11.

Par conséquent, cette force $\vec{R}'$, appliquée en C, équilibre les effets de translation $(\vec{R} + \vec{R}' = \vec{0})$ et de rotation $(\vec{M}_0 + \vec{M}'_0 = \vec{0})$ du corps solide : *du point de vue de la dynamique, la résultante* $\vec{R}$ *appliquée en C est équivalente à l'ensemble des forces de pesanteur appliquées au corps solide.*

## 6.2 Quelques exemples empruntés à la biomécanique

1° La détermination de la masse d'une partie du corps humain.

Proposons-nous de peser le bras droit $mg$ d'un individu. Pour cela (fig. 5.12, a) le patient s'étend sur une table rigide dont une extrémité A repose sur un couteau, l'autre B s'appuyant sur une balance monoplateau (dynamomètre) et il étend ses bras le long de son corps (fig. 5.12, b).

Soit C le centre de masse du corps de masse M. Posons $\overrightarrow{AC} = \vec{l}_1$ et $\overrightarrow{AB} = \vec{l}_0$, si $l_0$ est la longueur de l'individu allongé : $\vec{F}_0$ étant l'indication de la balance à l'équilibre, $\vec{F}_N$ la réaction du couteau, on aura :

$$M\vec{g} \wedge \overrightarrow{AC} + \vec{F}_0 \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

Tout en restant allongé, le patient déplace son bras droit à plat et perpendiculairement à son corps (fig. 5.12, c) : la réaction devient $\vec{F}'_N$ et la réponse de la balance $\vec{F}'_0$, alors que le centre de masse du bras, où agit $m\vec{g}$, s'est déplacé de $\Gamma_1$ à $\Gamma_2$ (fig. 5.12, d). Comme simultanément le centre de masse du corps s'est déplacé, nous en tiendrons compte en introduisant

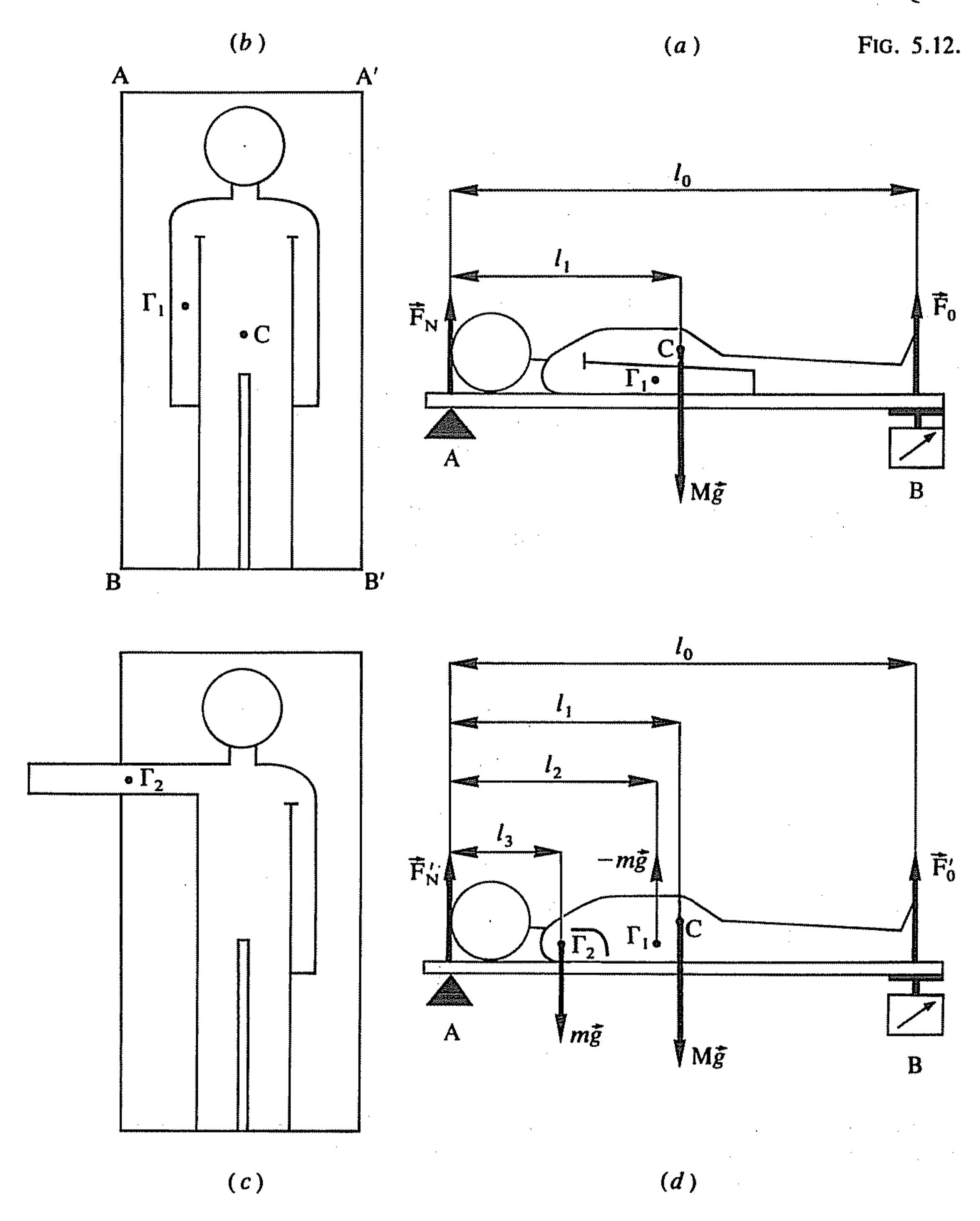



FIG. 5.12.

une force fictive $-m\vec{g}$ agissant en $\Gamma_1$ : à l'équilibre, posant $\overrightarrow{A\Gamma_1} = \vec{l}_2$, $\overrightarrow{A\Gamma_2} = \vec{l}_3$, nous pourrons écrire :

$$M\vec{g} \wedge \overrightarrow{AC} - m\vec{g} \wedge \overrightarrow{A\Gamma_1} + m\vec{g} \wedge \overrightarrow{A\Gamma_2} + \vec{F}'_0 \wedge \overrightarrow{AB} = 0.$$

Algébriquement, ces deux équations sont équivalentes au système :

$$Mgl_1 - F_0 l_0 = 0,$$
$$Mgl_1 - mgl_2 + mgl_3 - F'_0 l_0 = 0,$$

soit :

$$mg(l_2 - l_3) = (F_0 - F'_0) l_0,$$

c'est-à-dire :

$$mg = (F_0 - F'_0)\,\frac{l_0}{l_2 - l_3}.$$

Les mesures anatomiques permettent ensuite d'exprimer la distance moyenne $(l_2 - l_3)$ du centre de masse du bras à l'attache de l'épaule, distance exprimée en pourcentage de la longueur totale $l$ du bras : $(l_2 - l_3) = \alpha l$. Finalement :

$$mg = (F_0 - F'_0)\left(\frac{l_0}{\alpha l}\right).$$

2° Le poids du bras $mg$ et la distance de son centre de masse $\Gamma$ à l'attache O de l'épaule étant connus, proposons-nous maintenant de calculer l'effort qu'exerce le muscle deltoïde pour que l'homme, une fois relevé, maintienne son bras tendu horizontalement. Schématisons cette situation sur la fig. 5.13 : le bras est tendu selon O$x$, le deltoïde exerçant à son point d'attache D une tension $\vec{T}$ faisant l'angle $\alpha$ avec O$x$ ; $\vec{R}$ désigne la réaction de l'épaule sur l'articulation de l'humérus. Écrivons qu'il y a équilibre du bras dans le champ de pesanteur :

$$\vec{R} + \vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{OD} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{O\Gamma} \wedge m\vec{g} = \vec{0}.$$

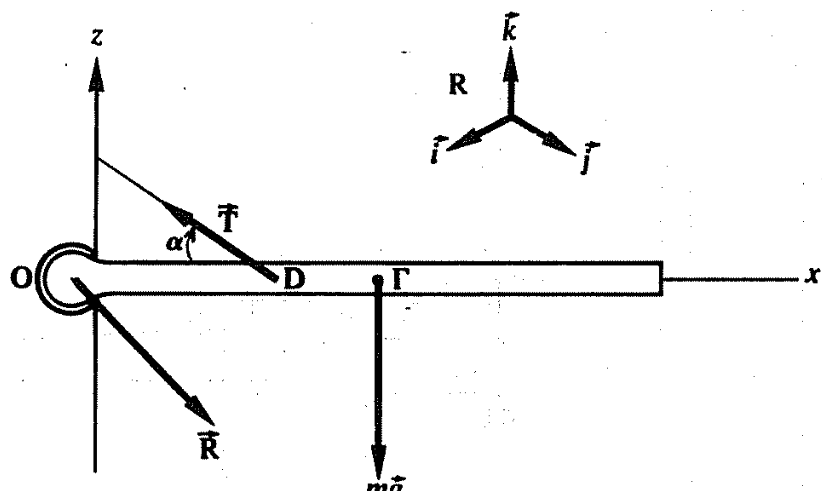



FIG. 5.13.

Si nous décomposons $\vec{R}$ et $\vec{T}$ selon O$x$ et O$z$, les normes de leurs composantes respectives sont $R_x$, $R_z$ et $T_x$, $T_z$ d'où en projetant les équations vectorielles ci-dessus :

$$\begin{aligned} R_x - T_x &= 0 \qquad & T_x &= T\cos\alpha \\ -R_z + T_z - mg &= 0 & T_z &= T\sin\alpha \\ OD \times T_z - O\Gamma \times mg &= 0 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow OD \times T\sin\alpha = O\Gamma \times mg \longrightarrow T = \frac{O\Gamma}{OD}\,\frac{mg}{\sin\alpha};$$

$$\left.\begin{aligned} R_x &= T_x = T\cos\alpha \\ R_z &= T_z - mg = T\sin\alpha - mg \end{aligned}\right\} \longrightarrow R^2 = R_x^2 + R_z^2.$$

A. N. : Si $m = 4$ kg, OD = 0,15 m, O$\Gamma$ = 0,33 m, $\alpha = 17°$, on trouve :

$$T = 295 \text{ N} \quad \text{et} \quad R = 285 \text{ N}.$$

## 7. UN EXEMPLE D'ÉTUDE DE LA DYNAMIQUE D'UN SYSTÈME : LA BALLISTOCARDIOGRAPHIE

Soit un oscillateur harmonique, de masse $m$, de fréquence $\omega$, d'amplitude A. On le suspend à l'intérieur d'une boîte rigide, de masse M, de hauteur $2l$, reposant sur une surface horizontale (fig. 5.14). On appelle $\vec{N}$ la réaction de cette surface et on désigne par $z$ la cote, à l'instant $t$, de la masse $m$. Si $z_0$ est la cote de la masse $m$ à l'équilibre, par un choix convenable de l'origine des temps, nous pouvons écrire :

$$z = z_0 + A \sin \omega t.$$

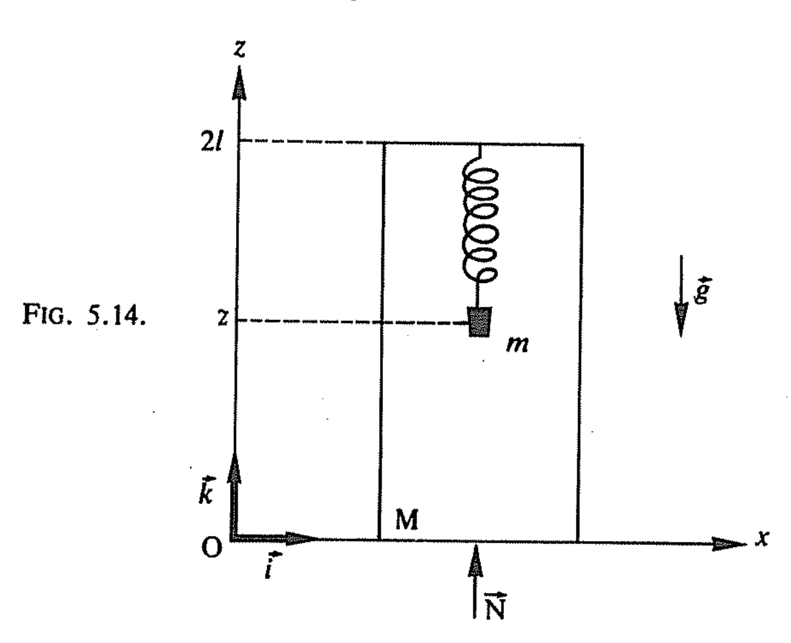



FIG. 5.14.

La boîte M ayant son centre de masse à la cote $l$, il en résulte pour la cote $z_C$ du centre de masse du système ($m$, M) la valeur : $z_C = (mz + Ml)/(M+m)$ et pour l'équation dynamique de son mouvement :

$$(M+m)\ddot{z}_C\vec{k} = \Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{N} + (M+m)\vec{g} = m\ddot{z}\vec{k},$$

c'est-à-dire :

$$(M+m)\ddot{z}_C = N - (M+m)g = mA\,\ddot{\overbrace{(\sin \omega t)}} = -m\omega^2 A \sin \omega t\,;$$

d'où l'on tire :

$$N = (M+m)g - m\omega^2 A \sin \omega t.$$

La réaction N apparaît donc comme composée d'une valeur constante (le poids du système oscillateur-boîte) et d'une partie variable, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, d'amplitude maximum $m\omega^2 A$, en opposition de phase avec l'oscillateur $m$.

Considérons maintenant un cycle cardiaque : le pouls humain étant en moyenne de 75 pulsations par minute et le corps contenant, également en moyenne, 5 litres de sang, à chaque contraction cardiaque est injecté $\frac{5\,000}{75} \sim 65$ g $= 6{,}5 \cdot 10^{-2}$ kg de sang dans la circulation artérielle. Le centre de masse de ce sang varie alors d'à peu près 7 cm $= 7 \cdot 10^{-2}$ m.

Si nous approximons le mouvement du sang par celui d'un oscillateur harmonique, nous aurons une masse $m$ de $6{,}5 \cdot 10^{-2}$ kg qui oscille à la fréquence de 75 pulsations/minutes, donc de période $T = 60/75 = 0{,}8$ s, avec une amplitude $A = 7 \cdot 10^{-2}$ m :

$$z_C = z_0 + A \sin \omega t = z_0 + 7 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{0{,}8} t\right).$$

Pour un homme, de masse $M = 80$ kg, qui monte sur le plateau d'une balance, sa circulation sanguine se comporte comme un oscillateur harmonique enfermé dans une boîte. Aussi, l'amplitude de la variation du poids mesuré par la balance sera :

$$\Delta N_{max} = m\omega^2 A = 6{,}5 \cdot 10^{-2} \times 7 \cdot 10^{-2} \left(\frac{2\pi}{0{,}8}\right)^2 = 0{,}28 \text{ N};$$

et la variation relative maximum, tous les 8/10 de seconde, sera :

$$\frac{\Delta N_{max}}{<N>} = \frac{\Delta N_{max}}{(M+m)g} = \frac{0{,}28}{80 \times 9{,}8} = 0{,}35 \cdot 10^{-3},$$

si $<N>$ désigne la moyenne temporelle de N.

Cette variation relative périodique est assez faible mais elle peut néanmoins être enregistrée : c'est le principe de base de la *ballistocardiographie* qui, avec d'autres techniques comme la phonocardiographie et l'électrocardiographie, vise à étudier le fonctionnement du cœur et du système sanguin.

# 6

# TRAVAIL ET ÉNERGIE

## 1. LE TRAVAIL DES FORCES

### 1.1 Définitions du travail élémentaire pour une particule

Considérons une particule P se déplaçant le long d'une trajectoire (C) sous l'action d'un champ de forces $\vec{F}$ (fig. 6.1). Soit un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{PP'} = d\vec{r}$ de $P(\overrightarrow{OP} = \vec{r})$ réalisé pendant l'intervalle de temps $dt$.

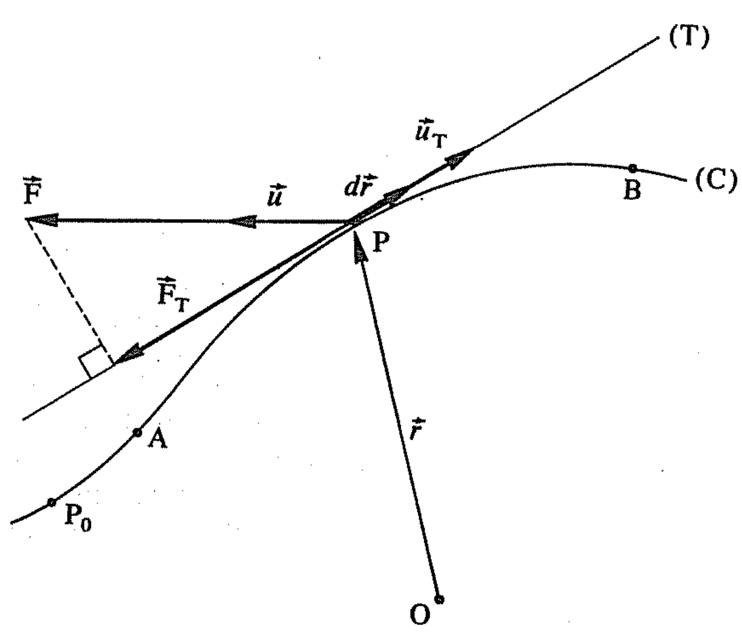



FIG. 6.1.

Par définition, *le travail effectué par la force* $\vec{F}$ *durant ce déplacement* est le produit scalaire :

$$\boxed{đW = \vec{F} \cdot d\vec{r}.^*} \qquad (6.1)$$

Cette définition peut prendre plusieurs formes équivalentes en posant : $\vec{F} = F\vec{u}$, $d\vec{r} = dr\,\vec{u}_T \# ds\,\vec{u}_T$, $\theta = (\vec{u}_T, \vec{u})$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la force $\vec{F}$ et $\vec{u}_T$ le vecteur unitaire de la tangente (T) à la trajectoire (C) :

* Pour l'écriture đW au lieu de dW, se reporter à l'Annexe mathématique, § 7 (tome 2).

1° $đW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,ds\,(\vec{u} \cdot \vec{u}_T) = F\,ds\,\cos(\vec{u}, \vec{u}_T) = F \cos\theta\, ds$.
2° $đW = (\vec{F} \cdot \vec{u}_T)ds = F_T\,ds$ car $F_T = \vec{F} \cdot \vec{u}_T = F\cos\theta$, composante algébrique de $\vec{F}$ sur (T). Cet ensemble de définitions équivalentes à (6.1) :

$$\boxed{đW = F \cos\theta\, dx = F_T\, ds,} \qquad (6.2)$$

permet ainsi de dire que :

> le travail élémentaire de la force est égal au déplacement de la particule multiplié par la composante de cette force suivant le déplacement.

Enfin, si dans le repère R : $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, on a : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$, il en résulte :

$$\boxed{đW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz.} \qquad (6.3)$$

Cette dernière définition s'obtient d'ailleurs directement en appliquant $đW = F_T\, ds$ aux déplacements élémentaires correspondants $dx$, $dy$, $dz$ puis en utilisant le principe de superposition pour calculer le travail élémentaire total.

## 1.2 Propriétés

De (6.1), il découle que *si la force est perpendiculaire au déplacement* ($\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$), *le travail de la force est nul.*

*Exemples :* • travail d'une force centripète : $\vec{F} = \vec{F}_N \perp \vec{v}$;
• travail dans le cas d'une interaction magnétique : $\vec{F} \perp \vec{v}$.

*Si* $\vec{F}_T$ *et* $d\vec{r}$ *ont la même direction* sur la tangente (T) (fig. 6.1), $\cos(\vec{u}, \vec{u}_T) > 0$ entraîne $đW > 0$ : on dira que la force effectue un *travail moteur*; *si* $\vec{F}_T$ *et* $d\vec{r}$ *ont des directions opposées*, $\cos(\vec{u}, \vec{u}_T) < 0$ et $đW < 0$ : le *travail* sera dit *résistant*, la force s'opposant au déplacement.

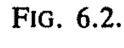
Quand plusieurs forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... agissent sur P, les travaux effectués par chacune d'elles au cours du même déplacement $d\vec{r}$ sont : $đW_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$, $dW_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$, ...; le principe de superposition donne le travail infinitésimal total :

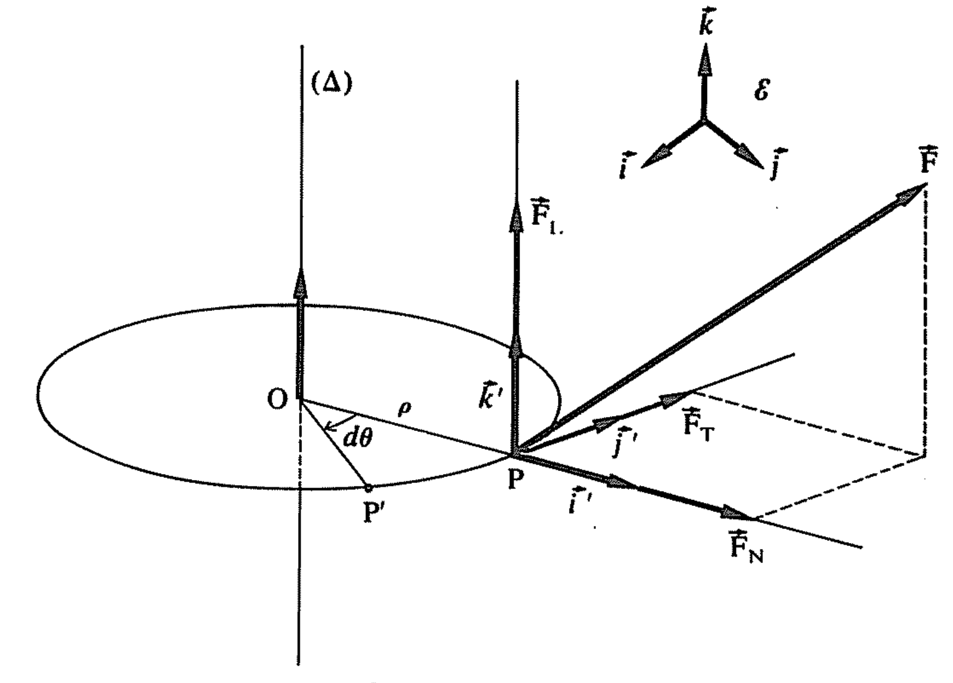
$$đW = \sum_i đW_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot d\vec{r} = \vec{R} \cdot d\vec{r}. \qquad (6.4)$$

> Le travail élémentaire de l'ensemble des forces appliquées en P est égal au travail de leur résultante $\vec{R}$.

*Exemple :* Soit une force $\vec{F}$ (fig. 6.2) dont le point d'application P décrit la circonférence (O, $\rho$); cette force peut être décomposée en

$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N + \vec{F}_L$, $\vec{F}_N$, $\vec{F}_T$ et $\vec{F}_L$ étant ses composantes sur le référentiel mobile $(P; \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$, repère direct de $\mathcal{E}$ et tel que $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{i}\,'$ soient colinéaires, $\vec{j}\,'$ étant contenu dans le plan de la circonférence.


FIG. 6.2.




Au cours du déplacement $\widehat{PP'} = ds = \rho\, d\theta$ avec $d\theta = (OP, OP')$, les composantes $\vec{F}_N$ et $\vec{F}_L$, orthogonales au déplacement, ne travaillent pas; le seul travail est donc celui de $\vec{F}_T$ :

$$đW = F_T\, ds = \rho\, F_T\, d\theta.$$

Comme, par définition, $\rho\, F_T$ mesure *le moment* $M_\Delta$ *de la force* $\vec{F}$ *par rapport à l'axe* $(\Delta)$ perpendiculaire en O au cercle $(O, \rho)$ et orienté par $\vec{k}\,'$, nous pouvons écrire pour le travail élémentaire de rotation de P :

$$\boxed{đW = M_\Delta\, d\theta, \quad (M_\Delta = \rho\, F_T):} \qquad (6.5)$$

— si $M_\Delta$ et $d\theta$ sont de mêmes signes, la force exerce un *travail moteur* $(đW > 0)$;
— si $M_\Delta$ et $d\theta$ sont de signes contraires, la force s'oppose au déplacement et fournit un *travail résistant* $(đW < 0)$.

*Remarque :* l'appellation donnée à $M_\Delta$ provient de ce que $M_\Delta$ *est un scalaire qui mesure la projection sur l'axe* $(\Delta)$ *du moment de la force* $\vec{F}$ *calculé par rapport à* O : $M_\Delta = \mathrm{proj}_{(\Delta)} \vec{M}_0 = \mathrm{proj}_{(\Delta)}(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F})$; ce résultat est aisé à établir si l'on tient compte de ce que $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_N = \vec{0}$, $\mathrm{proj}_{(\Delta)}(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_L) = 0$ car $(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_L) \perp (\Delta)$ et $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_T = \rho\, F_T \vec{k}\,'$.

## 1.3 Travail élémentaire pour un système de particules. Cas du couple

Considérons maintenant deux particules $P_1$ et $P_2$ décrivant les trajectoires $(C_1)$ et $(C_2)$. Chacune d'elles est soumise à une force extérieure et à une force d'interaction mutuelle provenant de l'autre

particule (fig. 6.3). Si on appelle $d\vec{r}_1$ et $d\vec{r}_2$ les déplacements élémentaires de $P_1$ et $P_2$, le travail total fourni par toutes les forces sera :

$$đW = đW_1 + đW_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) \cdot d\vec{r}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) \cdot d\vec{r}_2.$$

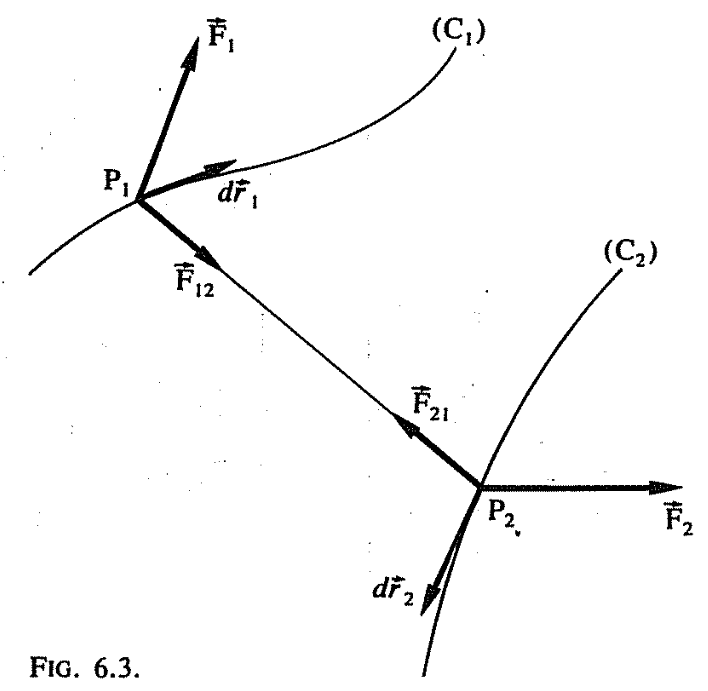



FIG. 6.3.

Ce résultat s'écrit encore : $đW = đW_{ext} + đW_{int}$ en posant : $đW_{ext} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2$ pour le *travail élémentaire des forces extérieures* et

$$đW_{int} = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \vec{F}_{12} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12}$$

pour le travail élémentaire des forces intérieures, $d\vec{r}_{12}$ étant le déplacement élémentaire relatif de $P_1$ par rapport à $P_2$.

Ceci se généralise sans difficulté à un nombre quelconque de particules : *le travail élémentaire exercé par l'ensemble des forces agissant sur un système de particules est égal à la somme des travaux des forces extérieures au système et des travaux des forces d'interactions mutuelles des particules.*

Quand le système est un *corps solide*, les déplacements relatifs comme $d\vec{r}_{12}$ sont nuls — car $r_{12}$ = constante — et *les travaux des forces intérieures sont toujours nuls.*

*Exemple :* Soit *un couple* ($\Gamma$) de forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ : par définition, dans un tel système $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ et $r_{12}$ = *constante* (fig. 6.4); on a :

$$\vec{M}_0(\vec{F}_1) = \overrightarrow{OP}_1 \wedge \vec{F}_1 = (-\overrightarrow{OP}_1) \wedge (-\vec{F}_1) = \overrightarrow{OP}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{M}_0(\vec{F}_2).$$

Le moment $\vec{M}_0(\Gamma)$ du système de force, c'est-à-dire du couple ($\Gamma$), est la somme des moments individuels $\vec{M}_0(\vec{F}_1)$ et $\vec{M}_0(\vec{F}_2)$. Il en est de même pour le moment $M_\Delta(\Gamma)$ du couple par rapport à l'axe ($\Delta$) perpendiculaire en O au cercle $\left(O, \frac{1}{2} r_{12}\right)$ que décrivent $P_1$ et $P_2$; il vient donc :

$$\boxed{M_\Delta(\Gamma) = M_\Delta(\vec{F}_1) + M_\Delta(\vec{F}_2) = 2M_\Delta(\vec{F}_1) = d \times F_T,}$$

si $d = r_{12}$ est le diamètre du cercle. Par suite :

$$\boxed{đW = M_\Delta(\Gamma)\,d\theta, \quad \left(M_\Delta(\Gamma) \doteq d \times F_T\right).} \qquad (6.6)$$

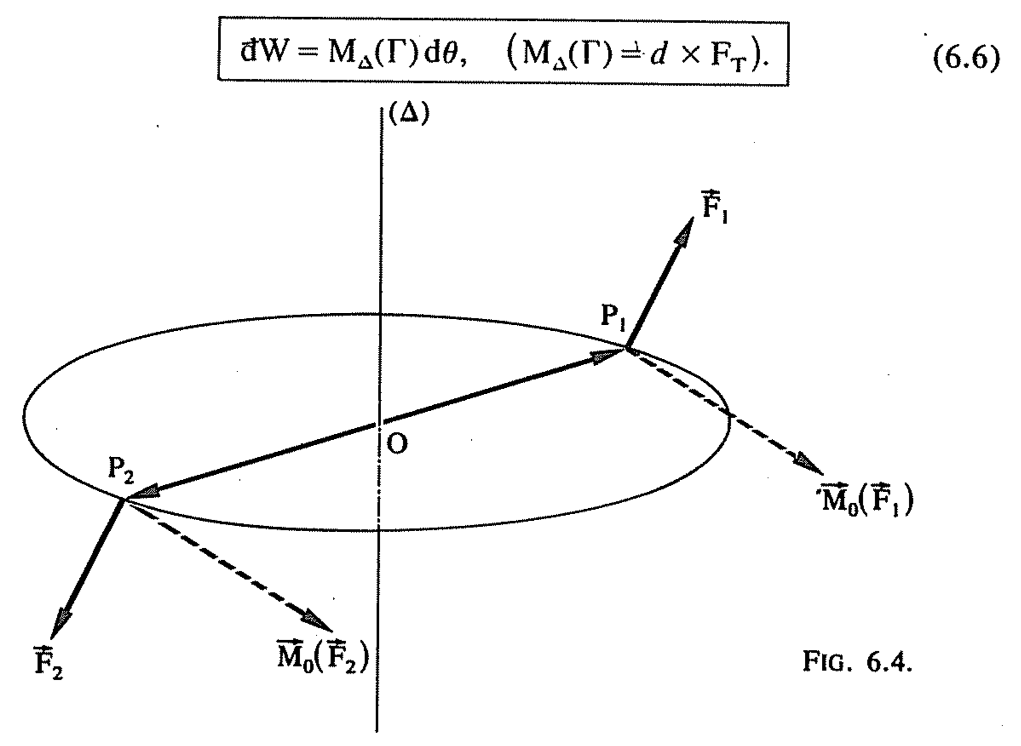



FIG. 6.4.

Là aussi, si $đW > 0$, le travail du couple est moteur; si $đW < 0$, il est résistant.

## 1.4 Unités

L'équation aux dimensions d'un travail est $[W] = [M][L]^2[T]^{-2}$ et son unité (SI) est le *newton-mètre* (N.m) ou *joule* (J). Signalons que le moment d'un couple se mesurant aussi en newton-mètre, il est préférable de mesurer un travail en joule.

## 1.5 Travail le long d'une trajectoire

En général, la particule P se déplace dans le champ de forces $\vec{F}$, d'un point A à un point B de la trajectoire (C) (fig. 6.1). Le travail $W_{\widehat{AB}}$ effectué par $\vec{F}$ est alors la somme de tous les travaux élémentaires, ce qui s'écrit :

$$\boxed{W_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} đW = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AB}} F_T\, ds,} \qquad (6.7)$$

le symbole $\widehat{AB}$ rappelant que l'*élément différentiel* $đW$ *doit être intégré tout le long de la trajectoire* joignant A à B (*intégrale curviligne*). Le calcul de (6.7), généralement complexe, devient relativement aisé quand le travail élémentaire $đW$ peut s'écrire comme la différentielle (ou la somme de différentielles) d'une application paramétrée par une *seule* variable : dans ce cas, l'intégrale curviligne se réduit à une intégrale définie.

*Exemples :* • $F_T$ est connue en fonction de l'abscisse curviligne $s = \widehat{P_0P}$ : $W_{\widehat{AB}} = \int_{s_A}^{s_B} F_T(s)\,ds$, où $s_A$ et $s_B$ sont les abscisses curvilignes respectives de A et B.

- $\vec{F}$ et $\vec{r}$, donc $d\vec{r}$, sont paramétrés par une même variable, le temps $t$ pour fixer les idées : $W_{\widehat{AB}} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(t) \cdot d\vec{r}(t)$, où $t_A$ et $t_B$ sont les valeurs du paramètre $t$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{r}(t_A)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{r}(t_B)$.
- Les composantes de $\vec{F}$ ($F_x$, $F_y$, $F_z$) sont des fonctions respectivement de $x$, $y$ et $z$. De (6.3), il vient :

$$W_{\widehat{AB}} = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x)\,dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y(y)\,dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z(z)\,dz,$$

avec : $\quad A = (x_A, y_A, z_A) \quad$ et $\quad B = (x_B, y_B, z_B)$.

- *Si* $F_T$ n'est pas connue analytiquement en fonction de $s$, on peut toujours tracer le graphe $[s, F_T(s)]$ (fig. 6.5) : $đW = F_T\,ds$ mesure l'aire infinitésimale du rectangle élémentaire de base $ds$ et de hauteur $F_T$; par conséquent $W_{\widehat{AB}}$ mesure l'aire totale hachurée sur la figure 6.5.

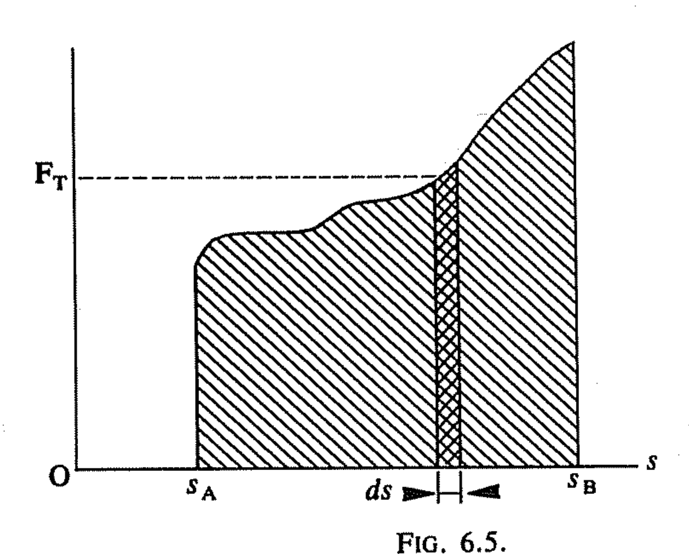



FIG. 6.5.

## 2. EXEMPLES DE CALCULS DE TRAVAUX

### 2.1 Force de pesanteur

Soit le repère $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est pris sur terre, $(\vec{i}, \vec{j})$ dans le plan horizontal et $\vec{k}$ selon la verticale du lieu orientée vers le haut (fig. 6.6). Sur R, on a $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ et $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$. D'où d'après (6.3) :

$$đW = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg\ dz,$$

$$W_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} -mg\ dz = -mg\int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A), \qquad (6.8)$$

si $z_A$ et $z_B$ sont les cotes des points A et B. *Ce résultat est donc vrai quel que soit le chemin* $\widehat{AB}$ *joignant* A *à* B.

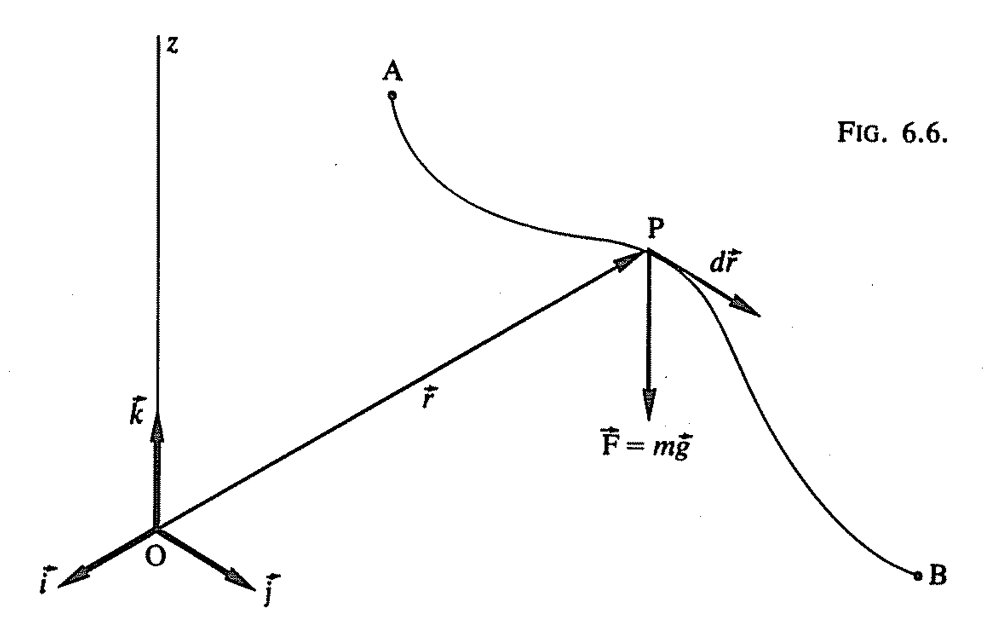



FIG. 6.6.

## 2.2 Force de gravitation

Considérons la figure 6.7 avec : $\vec{F} = -\gamma \dfrac{mm'}{r^2}\vec{u}\,(|u| = 1)$, la force d'attraction de la particule O, de masse $m$, sur la particule P, de masse $m'$, située à une distance $r$ de $P(\overrightarrow{OP} = \vec{r} = r\vec{u})$. Alors : $đW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\gamma \dfrac{mm'}{r^2}\vec{u} \cdot d\vec{r}$; comme : $d\vec{r} = d(r\vec{u}) = dr\,\vec{u} + r\,d\vec{u}$, on a : $d\vec{r} \cdot \vec{u} = dr\,(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \vec{r}\,(d\vec{u} \cdot \vec{u}) = dr$ (cf. § 5.2 du chap. 1).
Nous avons ainsi :

$$đW = \gamma mm'\left(-\frac{dr}{r^2}\right) = \gamma mm'\,d\left(\frac{1}{r}\right),$$

et :

$$W_{\widehat{AB}} = \gamma mm'\int_{r_A}^{r_B} d\left(\frac{1}{r}\right) = \gamma mm'\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right), \tag{6.9}$$

*résultat indépendant du chemin $\widehat{AB}$ effectivement parcouru.*

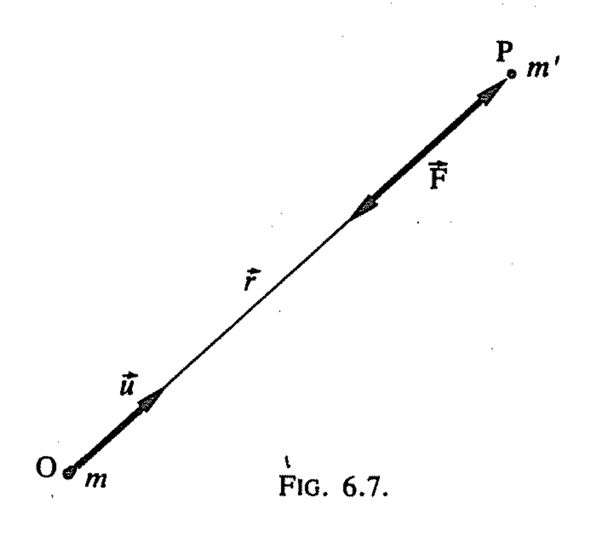



FIG. 6.7.

*Remarque :* le résultat est le même pour une force électrostatique due à une charge $q$ agissant sur la charge $q'$ : on remplace $\gamma m m'$ par $\dfrac{-qq'}{4\pi\varepsilon_0}$ dans l'expression (6.9).

## 2.3 Force élastique

Considérons un ressort élastique de raideur $k$ se déplaçant selon la direction $\vec{u}\,(|u|=1)$. Si sa position au repos est donnée par $\overrightarrow{OP}_0 = \vec{r}_0 = x_0\vec{u}$, en un point quelconque P par $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\vec{u}$, la loi de Hooke s'écrit : $\vec{F} = -k(\vec{r}-\vec{r}_0) = -k(x-x_0)\vec{u}$. Comme :

$$d\vec{r} = dx\,\vec{u},\ đW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -k(x-x_0)\,dx\,(\vec{u}\cdot\vec{u}) = -k(x-x_0)\,dx = -k(x-x_0)\,d(x-x_0) = -\frac{k}{2}\,d[(x-x_0)^2],$$

il vient :

$$W_{\widehat{AB}} = -\frac{k}{2}\int_{x_A}^{x_B} d[(x-x_0)^2] = -\frac{k}{2}[(x_B-x_0)^2-(x_A-x_0)^2]. \qquad (6.10)$$

# 3. NOTION DE PUISSANCE

Par définition la *puissance moyenne* $P_{moy}$ d'une force est le travail qu'elle fournit par unité de temps. Si ce travail total W a été réalisé durant le temps $t$ : $P_{moy} = W/t$.

Si pendant le temps $dt$ le travail effectué est $đW$, en supposant W différentiable par rapport à $t$, on aura : $đW = \dot{W}\,dt$ et la *puissance instantanée*, vitesse à laquelle s'effectue ce travail, s'écrit :

$$\boxed{P = \dot{W}.} \qquad (6.11)$$

L'équation aux dimensions de la puissance est $[P] = [M][L]^2[T]^{-3}$. Dans le *Système International,* l'unité est le *watt* ($W = J\cdot s^{-1}$); les multiples, plus fréquemment utilisés, sont le kilowatt ($1\ kW = 10^3\ W$), le mégawatt ($1\ MW = 10^6\ W$).

*Exemples :* Puissance d'un réchaud électrique $\sim$1-3 kW, d'une locomotive électrique $\sim$5 MW, d'une centrale nucléaire $\sim$500 à 1 300 MW.

# 4. L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Revenons à l'expression (6.1) du travail élémentaire : $đW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$. D'après la seconde loi de Newton, nous savons que $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ avec $\vec{p} = m\vec{v}$. D'autre part, de $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, il résulte que la différentielle $d\vec{r}$ de $\vec{r}(t)$ s'écrit : $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\,dt = \vec{v}\,dt$ ; ainsi :

$$đW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \dot{\vec{p}}\cdot\frac{\vec{p}}{m}\,dt = \dot{\overbrace{\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m}\right)}}\,dt = \dot{\overbrace{\left(\frac{p^2}{2m}\right)}}\,dt.$$

Comme $\dot{\widehat{\left(\frac{p^2}{2m}\right)}}\mathrm{d}t$ est la différentielle de $\frac{p^2}{2m}$, on a enfin :

$$đW = \mathrm{d}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right) = \mathrm{dE}_c, \tag{6.12}$$

soit :

$$\mathrm{E}_c = \frac{p^2}{2m} + \mathrm{C}^{\mathrm{te}} = \frac{1}{2}\,mv^2 + \mathrm{C}^{\mathrm{te}};$$

$$\boxed{\mathrm{E}_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}\,mv^2} \tag{6.13}$$

*est par définition l'énergie cinétique de la particule* prise égale à 0 si $p = v = 0$ : homogène à un travail, elle s'exprime avec les mêmes unités. Lorsque la particule décrit le chemin $\widehat{\mathrm{AB}}$, on aura alors :

$$\mathrm{W}_{\widehat{\mathrm{AB}}} = \int_{\widehat{\mathrm{AB}}} đW = \int_{\mathrm{E}_{c,\,\mathrm{A}}}^{\mathrm{E}_{c,\,\mathrm{B}}} \mathrm{dE}_c = \int_{p_\mathrm{A}}^{p_\mathrm{B}} \mathrm{d}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \int_{v_\mathrm{A}}^{v_\mathrm{B}} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right),$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathrm{W}_{\widehat{\mathrm{AB}}} = \mathrm{E}_{c,\,\mathrm{B}} - \mathrm{E}_{c,\,\mathrm{A}} = \frac{1}{2m}(p_\mathrm{B}^2 - p_\mathrm{A}^2) = \frac{1}{2}\,m(v_\mathrm{B}^2 - v_\mathrm{A}^2),} \tag{6.14}$$

résultat que l'on peut énoncer :

> le travail effectué par les forces agissant sur une particule est égal à la variation de son énergie cinétique.

Ce théorème est très important d'un point de vue pratique car il permet de remplacer une intégrale curviligne — souvent complexe — par la variation de l'énergie cinétique de A à B, facile à calculer si l'on connaît la *norme* de la vitesse $\vec{v}$ aux points de départ A et d'arrivée B de la particule P.

Pour un système de particules, la définition de l'énergie cinétique se généralise par induction : *l'énergie cinétique totale du système est la somme des énergies cinétiques de toutes les particules :*

$$\mathrm{E}_c = \frac{1}{2}\sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2. \tag{6.15}$$

Compte tenu de ce qui a été démontré au § 1.3, *le travail de toutes les forces* du système — autant intérieures qu'extérieures — est alors exprimé par la *variation de l'énergie cinétique totale* du système.

## 5. DÉTERMINATION DE LA TRAJECTOIRE D'UNE PARTICULE PAR DES CONSIDÉRATIONS ÉNERGÉTIQUES

Soit $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$ et $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t)$ les vecteurs-positions d'un point fixe $P_0$ et d'un point courant P de la trajectoire (C). En appliquant le résultat (6.14) à ces deux points, on a :

$$\frac{p^2(\vec{r})}{2m} - \frac{p^2(\vec{r}_0)}{2m} = \frac{1}{2} mv^2(\vec{r}) - \frac{1}{2} mv^2(\vec{r}_0) = W_{\vec{r}_0, \vec{r}}, \qquad (6.16)$$

où $W_{\vec{r}_0, \vec{r}}$ désigne le travail de la force pour amener la particule de $P_0$ en P. *Si l'on connaît $v_0 = v(\vec{r}_0)$ la vitesse à l'instant initial $t = 0$, et le travail $W_{\vec{r}_0, \vec{r}}$ effectué durant le temps t nécessaire pour que la particule aille de $P_0$ à P, on peut en principe en déduire $\vec{r}(t)$ à tout instant.*

Supposons, pour simplifier, que le mouvement ait lieu sur un axe (Δ) orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}$. On pose $\vec{r} = x\vec{u}$, $\vec{r}_0 = x_0\vec{u}$ et (6.16) devient :

$$\frac{1}{2} mv^2(x) - \frac{1}{2} mv^2(x_0) = W_{x_0, x},$$

$$\longrightarrow v^2(x) = \dot{x}^2 = \frac{2}{m} W_{x_0, x} + v_0^2,$$

$$\longrightarrow \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m} W_{x_0, x} + v_0^2}.$$

Comme $dx = \dot{x}\, dt$ est la différentielle de $x$, on a :

$$dx = dt\sqrt{\frac{2}{m} W_{x_0, x} + v_0^2},$$

soit :

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} W_{x_0, x} + v_0^2}} = dt \longrightarrow \int_0^t dt = t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} W_{x_0, x} + v_0^2}}.$$

Connaissant $t$ en fonction de $x$, une fois l'intégration de droite effectuée, l'inversion du résultat donne $x(t)$, c'est-à-dire la loi horaire du mouvement sur (Δ).

### 5.1 Particule dans un champ de pesanteur uniforme

Soit $z_0 = 0$, $v = v_0$ quand $t = 0$. D'après le résultat (6.8) porté dans (6.16), nous avons :

$$\frac{1}{2} mv^2(z) - \frac{1}{2} mv_0^2 = W_{0, z} = -mgz.$$

D'où :

$$t = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{v_0^2 - 2gz}} = \left[ -\frac{1}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gz} \right]_0^z$$

$$= \frac{v_0}{g} - \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gz} \longrightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t.$$

## 5.2 Particule soumise à une force de rappel élastique

Si dans l'expression (6.10), on fait l'hypothèse que $x_0 = x_A = 0$ si $t = 0$, $x_B = x$, on a $W_{0,\,x} = -\frac{1}{2}kx^2$. D'où : $t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}x^2}}$ et tous calculs faits, on retrouve : $x = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$, mouvement harmonique de fréquence angulaire $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, de vitesse $\dot{x}(t=0) = v_0$, d'amplitude $\sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0$.

# 6. EXEMPLES DE CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

## 6.1 Cas d'une force de pesanteur

(6.8) et (6.14) nous permettent d'écrire :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mgz_B + mgz_A,$$

ou encore :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A.$$

De part et d'autre du signe égal apparaît l'expression : $\frac{1}{2}mv^2 + mgz$, calculée en B et A : cette expression, homogène à une énergie, est donc *constante* sur (C) puisque les points A et B sont quelconques sur la trajectoire.

On peut alors dire que dans ce problème $E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$ mesure l'*énergie totale de la particule*, $E_p = mgz$ étant une fraction variable de cette énergie totale, telle que :

$$W_{\widehat{AB}} = mgz_A - mgz_B = E_{p,\,A} - E_{p,\,B}.$$

Construisons le graphe de $E_p(z)$ (fig. 6.8) représenté par la demi-droite $(\Delta)$ et soit $E_t = E_0$ l'énergie totale de la particule : en chaque point de cote $z$, la distance de l'axe des $z$ à $(\Delta)$ donne $E_p$ et de l'axe $E_t = E_0$ à $(\Delta)$ on a $E_c$. L'énergie cinétique étant une quantité toujours positive ou nulle, on doit avoir de plus :

$$\boxed{E_c \geqslant 0 \longrightarrow E_p \leqslant E_t.} \qquad (6.17)$$

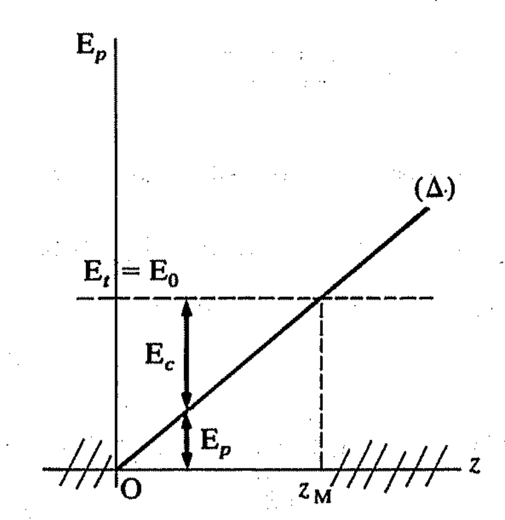



FIG. 6.8.

*Cette condition entraîne que la particule* P *ne peut dépasser la cote* $z_M = \dfrac{E_0}{mg}$ et que sa vitesse en ce point est nulle. Si $v_0$ est sa vitesse en $z = 0$, on a de plus la relation :

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = mgz_M \longrightarrow z_M = \frac{v_0^2}{2g}.$$

## 6.2 Cas d'une force de rappel élastique

Dans les conditions de l'exemple (5.2), nous avons $W_{0,x} = -\dfrac{1}{2} kx^2$. Ceci nous donne :

$$\frac{1}{2} mv^2(x) - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\frac{1}{2} kx^2,$$

soit :
$$\frac{1}{2} mv^2(x) + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Là aussi, l'expression $E_t = \dfrac{1}{2} mv^2 + \dfrac{1}{2} kx^2$ représente l'énergie totale de la particule, constante au cours de son mouvement et $E_p = \dfrac{1}{2} kx^2$ est telle que : $W_{\widehat{AB}} = E_{p,A} - E_{p,B}$. La figure 6.9 donne le graphe de $E_p(x)$, parabole (Γ) symétrique par rapport à l'axe des $E_p$. La relation (6.17) impose là aussi que pour une énergie totale donnée $E_0 = \dfrac{1}{2} mv_0^2$, P doit osciller entre $-x_M$ et $+x_M$ avec $x_M = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\, v_0$. Nous retrouvons l'amplitude du mouvement harmonique étudié au § 5.2.

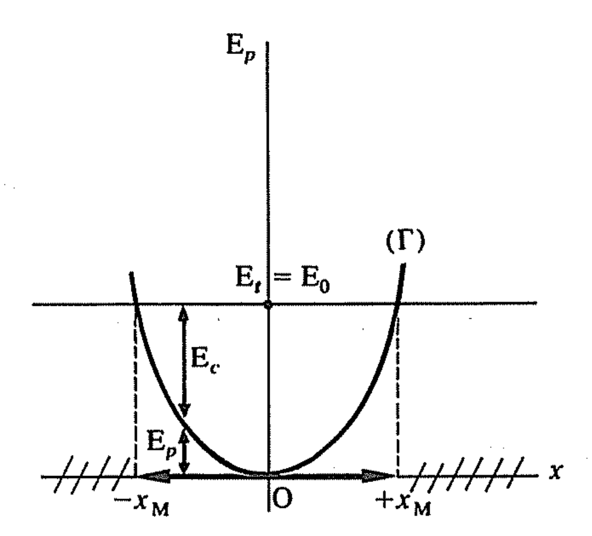



FIG. 6.9.

### 6.3 Cas d'une force de gravitation

Partant de (6.9), nous obtenons :

$$\frac{1}{2} m' v_B^2 - \frac{1}{2} m' v_A^2 = \gamma m m' \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right),$$

soit :

$$\frac{1}{2} m' v_B^2 - \frac{\gamma m m'}{r_B} = \frac{1}{2} m' v_A^2 - \frac{\gamma m m'}{r_B}.$$

$E_t = \frac{1}{2} m' v^2 - \frac{\gamma m m'}{r}$ est donc l'énergie totale constante de la particule et en posant $E_p = -\gamma \frac{mm'}{r}$, nous avons aussi : $W_{\widehat{AB}} = E_{p,\,A} - E_{p,\,B}$. Le graphe de $E_p(r)$ est représenté par l'hyperbole de la figure 6.10. Si $E_t = E_0 < 0$, la particule ne peut s'éloigner de la masse $m$ d'une distance supérieure à $r_m = -\gamma m m'/E_0$. On dira que son mouvement est lié (sous-entendu : à la particule $m$). Si $E_t = E_0' > 0$, P peut s'éloigner de $m$ d'une distance infinie et elle aura à grande distance une vitesse $v^2 = \frac{2E_0'}{m'}$ : son mouvement ne sera plus lié. Enfin, pour $E_t = 0$, la particule peut aller jusqu'à l'infini, mais sa vitesse y devient nulle.

## 7. L'ÉNERGIE POTENTIELLE

### 7.1 Force dérivant d'un potentiel

Dans les trois exemples précédents, le travail de la particule vérifie une propriété très particulière soulignée au § 2 :

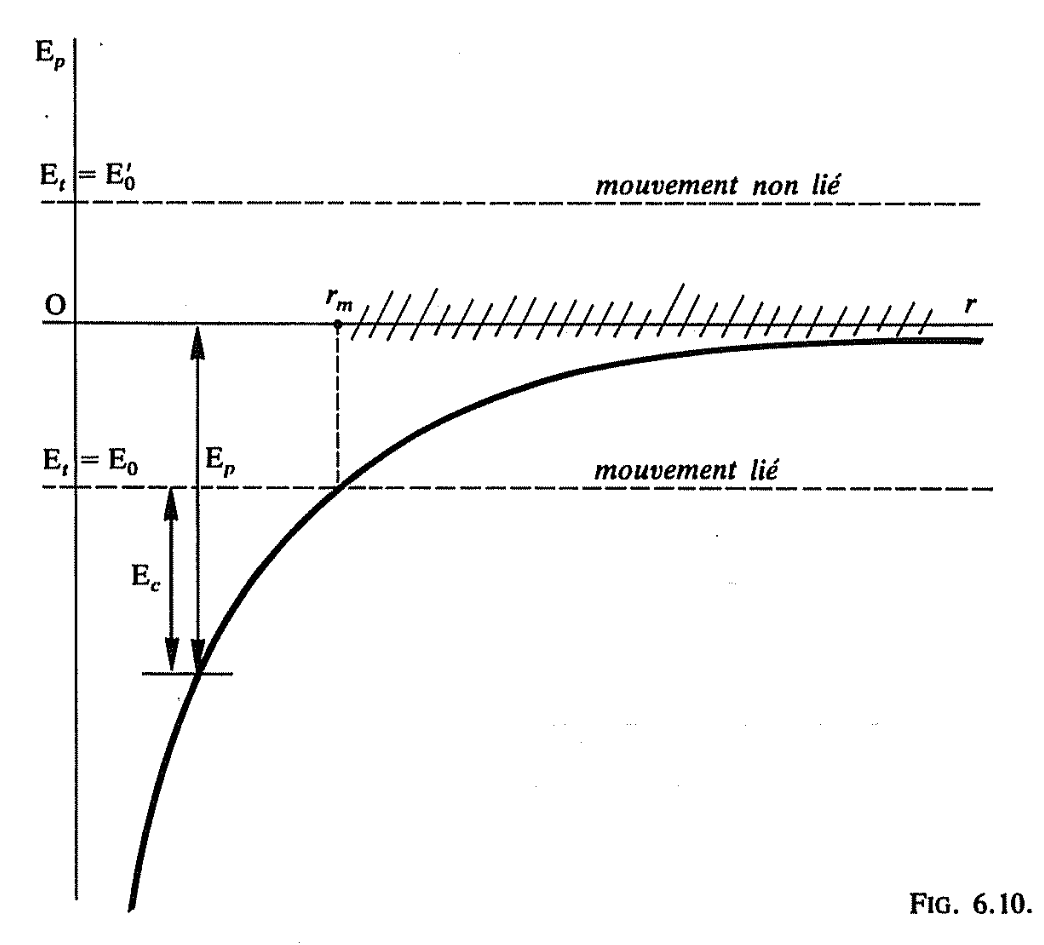



FIG. 6.10.

> le travail $W_{\widehat{AB}}$ de la force $\vec{F}$ pour amener la particule P de A en B est indépendant du chemin réellement parcouru : seules interviennent dans l'expression de $W_{\widehat{AB}}$ les coordonnées ou les distances des points A et B par rapport à une origine quelconque.

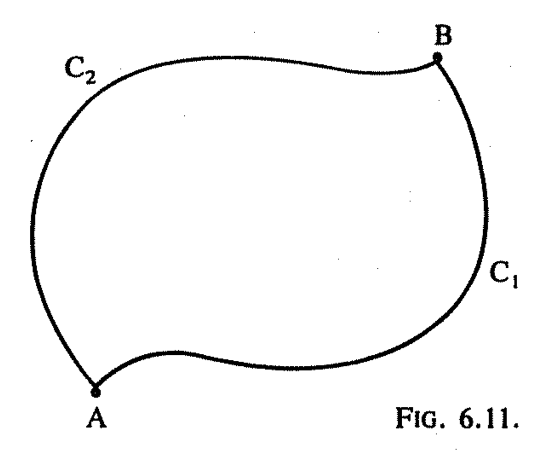



FIG. 6.11.

Soient deux chemins $\widehat{AC_1B}$ et $\widehat{AC_2B}$ différents joignant A et B (fig. 6.11); on a donc pour ces trois cas :

$$W_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AC_1B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AC_2B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Le travail pour aller de B en A est évidemment égal et opposé au travail pour aller de A en B : $W_{\widehat{BA}} = \frac{1}{2} mv_A^2 - \frac{1}{2} mv_B^2 = -\left(\frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2\right) = -W_{\widehat{AB}}$; par suite : $\int_{\widehat{BC_2A}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\widehat{AC_2B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\widehat{AC_1B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$; il en résulte que :

$$\int_{\widehat{AC_1B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{BC_2A}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AC_1B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\widehat{AC_1B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

D'où la propriété importante que vérifie la force $\vec{F}$ dans les trois exemples :

| le travail accompli par $\vec{F}$ sur un circuit fermé est nul. |
|---|

Le circuit fermé $\widehat{AC_1BC_2A}$ étant quelconque, ce résultat s'exprime mathématiquement par la condition :

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \qquad (6.18)$$

où le signe o superposé au signe $\int$ signifie que l'intégrale curviligne $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ est calculée sur *n'importe quel circuit fermé.*

Par définition, quand une *force* vérifie la propriété (6.18), on dit qu'elle *dérive d'un potentiel.*

## 7.2 Énergie potentielle

*Réciproquement*, supposons qu'une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel c'est-à-dire vérifie (6.18) pour n'importe quel circuit fermé : on peut démontrer qu'*il existe* alors une application $E_p(\vec{r})$ *de la position* $\vec{r}$ de la particule P telle que le travail de la force pour aller de A et B s'exprime toujours par la différence $E_{p,A} - E_{p,B}$ :

| Si $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, $\exists E_p(\vec{r})$ telle que $W_{\widehat{AB}} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = E_{p,A} - E_{p,B}$. (6.19) |
|---|

Nous voyons que ceci est bien vérifié dans les trois cas examinés aux § 2 et 6 :

- $F = mg \xrightarrow{(6.8)} W_{\widehat{AB}} = mgz_A - mgz_B \longrightarrow E_p = mgz$ ;
- $F = -kx \xrightarrow{(6.10)} W_{\widehat{AB}} = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2 \longrightarrow E_p = \frac{1}{2} kx^2$; (6.20)

- $\vec{F} = -\gamma \dfrac{mm'}{r^2}\vec{u} \xrightarrow{(6.9)} W_{\widehat{AB}} = \gamma mm'\left(\dfrac{1}{r_B} - \dfrac{1}{r_A}\right) \longrightarrow E_p = -\gamma \dfrac{mm'}{r}$.

Par définition, $E_p(\vec{r})$ est ce qu'il est convenu d'appeler *l'énergie potentielle de la particule*. Nous voyons qu'en fait la propriété (6.19) ne permet la *définition de* $E_p$ *qu'à une constante arbitraire additive près* : soit $E_0$ une énergie constante quelconque ajoutée à $E_p(r)$; cette constante apparaissant de part et d'autre dans la différence $(E_{p,A} - E_{p,B})$ n'en modifiera pas la valeur. On utilise cette indétermination pour fixer au mieux $E_0$ selon le problème étudié.

*Exemples :* • $E_p = mgz + E_0$ : si nous posons $E_p(0) = 0 \longrightarrow E_0 = 0$;

- $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2 + E_0$ : prenant $E_p(0) = 0$ à l'équilibre, $E_0 = 0$;
- $E_p = -\gamma \dfrac{mm'}{r} + E_0$ : pour $r = \infty$, imposons $E_p = 0$ quand les particules ne sont pratiquement plus en interaction :

$$E_0 = 0 \longrightarrow E_p = -\gamma \frac{mm'}{r}.$$

## 7.3 Condition nécessaire et suffisante pour qu'une force dérive d'un potentiel

Supposons qu'il existe $E_p(\vec{r})$ telle que la condition (6.19) soit satisfaite. Pour n'importe quel chemin $\widehat{AB}$, nous pouvons écrire :

$$W_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B} = \int_B^A dE_p = \int_A^B -dE_p,$$

soit :
$$\boxed{dE_p = -đW = -\vec{F}\cdot d\vec{r}.} \tag{6.21}$$

Une condition *nécessaire* est donc que la différentielle $dE_p$ de $E_p$ soit égale au travail élémentaire de la force.

Par définition (voir Annexe mathématique (tome 2)), cette différentielle s'écrit sur R : $dE_p = \dfrac{\partial E_p}{\partial x}dx + \dfrac{\partial E_p}{\partial y}dy + \dfrac{\partial E_p}{\partial z}dz$. Or, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$ d'après (6.3) : la condition (6.21) est donc équivalente à :

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x},\quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y},\quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z},} \tag{6.22}$$

système d'équations aux dérivées partielles qui, par intégration, permet théoriquement de déduire $E_p(x, y, z)$ de la connaissance de $\vec{F}$.

Examinons maintenant à quelles conditions, le système (6.22) admet une solution; les dérivations partielles d'une fonction de trois variables $f(x, y, z)$ jouissent de la propriété de symétrie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}.$$

Posons $f(x, y, z) = \mathrm{E}_p(x, y, z)$ et appliquons cette propriété à (6.22); on obtient immédiatement :

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{F}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{F}_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathrm{F}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{F}_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{F}_z}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{F}_x}{\partial z}.} \tag{6.23}$$

Ainsi si $\vec{\mathrm{F}} = (\mathrm{F}_x, \mathrm{F}_y, \mathrm{F}_z)$ vérifie les conditions (6.23), elle dérive d'un potentiel et l'énergie potentielle correspondante satisfait alors aux conditions (6.22) qui permettent de la connaître.

*Exemples :* • $\vec{\mathrm{F}} = \frac{y}{a}\vec{i} - \frac{x}{a}\vec{j}$ ($a = \mathrm{C^{te}}$) est telle que $\mathrm{F}_x = \frac{y}{a}$, $\mathrm{F}_y = -\frac{x}{a}$ avec $\frac{\partial \mathrm{F}_x}{\partial y} = \frac{1}{a} = -\frac{\partial \mathrm{F}_y}{\partial x}$. (6.23) n'est pas satisfait : $\vec{\mathrm{F}}$ ne dérive pas d'un potentiel;

• $\vec{\mathrm{F}} = x\vec{i} + y\vec{j}$ dérive d'un potentiel car $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$; l'énergie potentielle $\mathrm{E}_p$ s'obtient aisément : $đ\mathrm{W} = \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{r} = x\, dx + y\, dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = -\,d\mathrm{E}_p \longrightarrow \mathrm{E}_p = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \mathrm{E}_0 = -\frac{1}{2} r^2 + \mathrm{E}_0$;

• $\vec{\mathrm{F}} = m\vec{g} = (0, 0, -mg)$ vérifie (6.23) puisque toutes les dérivées partielles sont nulles : $\vec{\mathrm{F}}$ dérive d'un potentiel; de $\frac{\partial \mathrm{E}_p}{\partial z} = mg$, nous obtenons $\mathrm{E}_p = mgz + \mathrm{E}_p(x, y)$ : comme $\mathrm{E}_p$ ne dépend pas de $x$ et $y$ car $\frac{\partial \mathrm{E}_p}{\partial x} = -\mathrm{F}_x = \frac{\partial \mathrm{E}_p}{\partial y} = -\mathrm{F}_y = 0$, $\mathrm{E}_p(x, y) = \mathrm{E}_0 =$ constante;

• $\mathrm{F} = -kx$ est une fonction d'une seule variable $x$ : (6.23) est automatiquement satisfait et F admet $\mathrm{E}_p = \frac{1}{2} kx^2 + \mathrm{E}_0$ comme énergie potentielle car $\mathrm{E}_p'(x) = kx = -\mathrm{F}$;

• $\vec{\mathrm{F}} = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \vec{u} = -\gamma \frac{mm'}{r^3} \vec{r}$

$$= \left(-\gamma mm' \frac{x}{r^3}, -\gamma mm' \frac{y}{r^3}, -\gamma mm' \frac{z}{r^3}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \mathrm{F}_x}{\partial y} = -\gamma mm' x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \gamma mm' \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y} = \gamma mm' \frac{3xy}{r^5} = \frac{\partial \mathrm{F}_y}{\partial x}, \text{ etc.}$$

$\vec{\mathrm{F}} = -\gamma \frac{mm'}{r^3} \vec{r}$ dérive donc d'un potentiel et son énergie potentielle est : $\mathrm{E}_p = -\gamma \frac{mm'}{r}$ qui vérifie bien : $\frac{\partial \mathrm{E}_p}{\partial x} = -\gamma mm' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \gamma mm' \frac{x}{r^3} = -\mathrm{F}_x$, etc.

## 7.4 Cas d'un mouvement plan repéré par ses coordonnées polaires ($\rho, \theta$)

L'examen de la figure 6.12 où $\vec{r} = \rho\vec{i}'$ montre que le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r} = d(\rho\vec{i}') = d\rho\vec{i}' + \rho\, d\theta\vec{j}'$. Si on décompose également $\vec{F}$ sur le repère mobile $(O; \vec{i}', \vec{j}')$ selon : $\vec{F} = F_r\vec{i}' + F_\theta\vec{j}'$, on

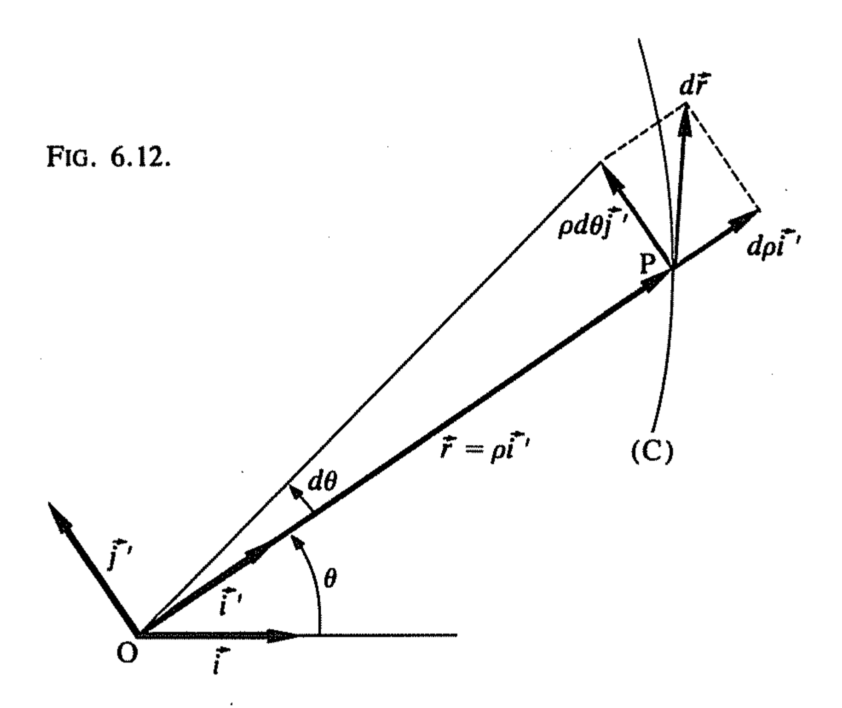



FIG. 6.12.

obtient : $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_r\, d\rho + \rho F_\theta\, d\theta$. Supposons que $\vec{F}$ satisfasse aux conditions (6.23). Alors en écrivant la différentielle :

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial E_p}{\partial \theta}\, d\theta,$$

on obtient :

$$\boxed{F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial \rho}, \quad F_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_p}{\partial \theta},} \qquad (6.24)$$

relations nous donnant par intégrations $E_p$ à partir de $F_r$ et $F_\theta$.

Si $\vec{F}$ est une force centrale paramétrée par la distance $\rho$, c'est-à-dire $\vec{F} = F(\rho)\vec{i}'$, alors $F_\theta = 0$ implique que $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$, donc $E_p$ indépendant de $\theta$ ; $F_r = F(\rho) = -E_p'(\rho)$ donne $dE_p = -F(\rho)\,d\rho$ que l'on peut ensuite intégrer.

*En conclusion, toute force centrale dérive d'un potentiel et son énergie potentielle* $E_p$ *ne dépend que de la distance* $\rho$ de la particule au centre de force. La réciproque est évidemment vraie.

*Exemple :* $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ examiné plus haut s'écrit aussi $\vec{F} = \vec{r}$ : c'est donc une force centrale et son potentiel $E_p = -\frac{1}{2}r^2 + E_0$ est bien tel que $F_r = -E_p'(\rho) = -E_p'(r)$ et $F_\theta = 0$.

### 7.5 Le calcul de l'énergie potentielle

Il peut se faire de deux manières :
— par intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles (6.22 ou 24) que vérifient les composantes de $\vec{F}$;
— par utilisation de (6.21), suivie d'une intégration :

$$E_p = \int -\vec{F}\cdot d\vec{r} + E_0 = -\int (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) + E_0,$$

ou de (6.24) :

$$E_p = E_0 - \int (F_r\,d\rho + \rho F_\theta\,d\theta).$$

Nous avons déjà eu l'occasion de traiter quelques exemples.

## 8. ÉNERGIE TOTALE

Dans les trois exemples du § 6, nous avons trouvé qu'il existe une expression analytique indépendante du point où se situe la particule P : cette constante, homogène à une énergie, nous l'avons appelée *énergie totale* $E_t$ de la particule. De plus, la différence $(E_t - E_c)$ de l'énergie totale et de l'énergie cinétique est apparue comme une application des coordonnées de P : le paragraphe 7 montre alors que $(E_t - E_c) = E_p$, l'énergie potentielle de la particule.

Ainsi si les conditions suivantes sont satisfaites :

— il existe une fonction $E_t$ des coordonnées de P et des composantes de sa vitesse $\vec{v}$, homogène à une énergie, et constante en tout point de la trajectoire (C) : $E_t(x, y, z, v_x, v_y, v_z) =$ constante = énergie totale,

— la différence : $E_t - E_c = E_t - \frac{1}{2}mv^2$, ne dépend que des coordonnées $(x, y, z)$ de P,

*il y a présomption* pour que $(E_t - E_c)$ soit l'énergie potentielle $E_p$ de la particule : pour qu'il y ait certitude, il faut vérifier les conditions (6-23) qui établissent si la force $\vec{F}$ dérive ou non d'un potentiel.

Réciproquement, si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, $E_p(x, y, z)$ existe et vérifie la relation :

$$W_{\widehat{AB}} = E_{c,B} - E_{c,A} = E_{p,A} - E_{p,B},$$

soit :

$$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B. \qquad (6.25)$$

$(E_c + E_p)$ étant constante pour tout point de la trajectoire est par définition l'*énergie mécanique totale* $E_t$ de la particule dans le champ de force $\vec{F}$.

(6.25) s'énonce ainsi :

> si la force qui agit sur P dérive d'un potentiel, l'énergie mécanique totale de la particule demeure constante,

c'est-à-dire :

$$\boxed{E_c + E_p = E_t = \text{constante.}} \tag{6.26}$$

Cette propriété constitue le théorème de *conservation de l'énergie mécanique totale* et pour cela *la force* $\vec{F}$ est aussi qualifiée de *conservative.*

*Remarque :* Nous avons déjà vu qu'une particule peut être soumise à différentes interactions. Chacune d'elles est caractérisée par une force $\vec{F}_i$ qui peut éventuellement dériver d'un potentiel : si tel est le cas, il y a une énergie potentielle $E_p^i$ associée à la force $\vec{F}_i$ ; l'énergie potentielle totale $E_p$ de la particule est la somme des énergies potentielles $E_p^i$ :
$E_p = \sum_i E_p^i$ et l'énergie mécanique totale constante s'écrit :

$$\boxed{E_t = E_c + E_p = E_c + \sum_i E_p^i = \text{constante.}} \tag{6.27}$$

*Il suffit qu'une seule des forces ne dérive pas d'un potentiel pour que* (6.27) *ne soit pas satisfaite.*

*Exemple :* dans l'expression de Millikan, il y a trois interactions qui agissent sur la charge $(m, q)$ :
— l'interaction de gravitation $\vec{F} = m\vec{g}$ qui dérive d'un potentiel;
— l'interaction électrique d'un champ uniforme qui elle aussi (voir § 10) dérive d'un potentiel;
— la force de viscosité $\vec{F} = -k\vec{v}$ qui ne dérive pas d'un potentiel comme cela est aisé à établir quand $\vec{v} \neq \vec{v}_L$.

L'énergie totale de la particule n'est pas conservative dans un tel cas.

## 9. REPRÉSENTATIONS DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE

Au § 6, nous avons eu l'occasion de tracer les graphes de $E_p$ pour trois cas importants; dans chacun d'eux, $E_p$ ne dépend que d'une seule variable de position : $z$ la distance au sol pour $E_p = mgz$, $x$ la distance de P au point d'équilibre du ressort pour $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, $r$ la distance à la particule $m$ pour $E_p = -\frac{\gamma m m'}{r}$.

Considérons la figure 6.13, graphe possible d'une énergie potentielle $E_p(x)$ caractérisée par une seule variable de position $x$; comme $F = -E_p'(x)$ nous pouvons déduire la valeur algébrique de $\vec{F}$ de la pente $E_p'(x)$ du graphe.

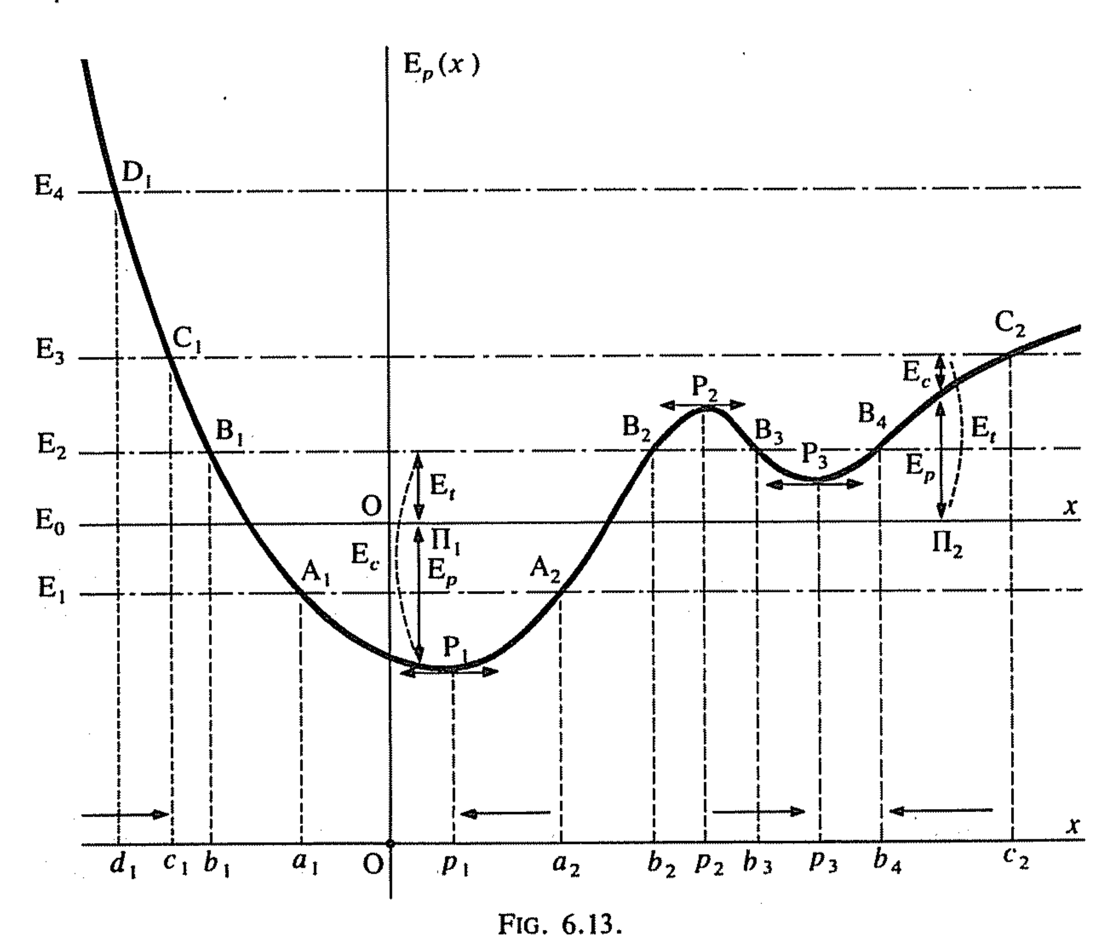



FIG. 6.13.

Si $E_p' < 0$, $E_p$ décroissante, $F > 0$ dirigée vers la droite ($\longrightarrow$); si $E_p' > 0$, $E_p$ croissante, $F < 0$ dirigée vers la gauche ($\longleftarrow$). Si $E_p' = 0$, $E_p$ extremum, $F = 0$, c'est-à-dire équilibre : si $E_p$ minimum, *équilibre stable* (aux points d'abscisses $p_1$ et $p_3$); si $E_p$ maximum, *équilibre instable* (en $p_2$) : pour chacune des positions correspondantes $p_1$, $p_2$ ou $p_3$, lorsqu'on y dépose la particule P avec une vitesse nulle, elle y reste; mais si on l'écarte légèrement des positions d'équilibre, dans les cas $p_1$ et $p_3$ elle aura tendance à revenir à ces positions stables alors qu'elle s'éloignera définitivement de $p_2$.

A un instant $t$, la particule P se trouve en un point d'abscisse $x$, représenté par $\pi$ sur l'axe O$x$ : son énergie totale $E_t$ a une certaine valeur constante dont le graphe est une droite parallèle à l'axe des $x$ (Ex. : en $\pi_1$, $E_t = E_2$, en $\pi_2$, $E_t = E_3$), $E_p$ représente toujours la distance du graphe $E_p(x)$ à l'axe O$x$ et $E_c = E_t - E_p = \frac{1}{2} mv^2 \geqslant 0$ est tel que $E_c$ est représenté par la distance de la droite $E_t = C^{te}$ au graphe $E_p(x)$, distance indépendante du choix de l'origine $E_0$ des énergies potentielle et totale :

— La droite $E_t = E_1$ coupe $E_p$ en $(A_1, A_2)$ : la particule sous l'action des forces de rappel va osciller sur le segment $(a_1, a_2)$ car $E_c \geqslant 0$ impliquant

$E_p \leqslant E_t = E_1$, elle ne peut aller à gauche de $a_1$ ou à droite de $a_2$ où $E_p > E_1$. En chacun de ces *points* $a_1$ et $a_2$, dits de *rebroussement*, sa vitesse est nulle ($E_c = 0$), son énergie potentielle maximum ($E_p = E_1$) et elle rebrousse chemin sous l'action des forces de rappel.

Au voisinage de $p_1$, son énergie potentielle est minimum $\left(E_p'(x = p_1) = 0\right.$ et $\left.E_p''(x = p_1) > 0\right)$ et sa vitesse maximum. Développons $E_p(x)$ en série de Taylor près de $x = p_1$ :

$$E_p(x) = E_p(p_1) + E_p'(p_1)[x - p_1] + \frac{1}{2} E_p''(p_1)[x - p_1]^2 + \ldots$$

Puisque $E_p'(p_1) = 0$, nous obtenons pour l'énergie totale de P, au voisinage de $p_1$ :

$$\frac{1}{2} mv^2 + E_p(p_1) + \frac{1}{2} E_p''(p_1)[x - p_1]^2 = E_1,$$

soit : $$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} k(x - p_1)^2 = E_1 - E_p(p_1) = \text{constante.}$$

Nous reconnaissons l'expression de l'énergie totale (§ 6) d'un oscillateur linéaire harmonique de force de rappel $k = E_p''(p_1) > 0$, de position d'équilibre $x = p_1$ et de fréquence angulaire $\omega = \sqrt{\frac{1}{m} E_p''(x_1)}$ : ceci justifie bien l'affirmation précédente comme quoi la particule P va *osciller* entre $a_1$ et $a_2$ et, pour le graphe correspondant de $E_p$ on parlera de *cuvette de potentiel*.

— La droite $E_t = E_2$ coupe $E_p$ en ($B_1$, $B_2$) et ($B_3$, $B_4$) : P va osciller sur ($b_1$, $b_2$) ou ($b_3$, $b_4$) et il ne pourra pas passer d'un intervalle à l'autre car la *barrière de potentiel* $B_2M_2B_3$ lui interdit ce passage ($E_p > E_t = E_2$).

— Pour $E_t = E_3$ coupant $E_p$ en ($C_1$, $C_2$), P va osciller sur ($c_1$, $c_2$), son énergie totale lui permettant de franchir la barrière de potentiel précédente.

— Enfin, comme $E_t = E_4$ ne coupe $E_p$ qu'en $D_1$, si la particule vient, par exemple, de la droite elle va « rebondir » sur le *mur* de *potentiel* et repartira définitivement vers l'infini positif.

On voit ainsi comment le tracé du graphe de $E_p$, énergie potentielle calculée ou mesurée expérimentalement, peut apporter des renseignements précis sur le comportement de la particule.

Il en est de même pour un mouvement caractérisé par *deux* variables de position : par exemple, $E_p(x, y)$ peut être représenté par une surface (S) (fig. 6.14). A un point $p_1$, de coordonnées ($x_1$, $y_1$), correspond sur (S) le point $P_1$ d'énergie potentielle $E_p(x_1, y_1)$. Tous les points P contenus à l'intersection du plan ($\pi_1$), parallèle à O$xy$, de cote $E_p(x_1, y_1)$, et de la surface (S) ont la même énergie potentielle : en projetant cette intersection sur O$xy$, on obtient une *courbe de niveau* ($\Gamma_1$) dont tous les points ($x$, $y$) ont la même énergie potentielle que le point $p_1$. De même, au minimum $M_0$ de (S) correspond $m_0$ dans O$xy$ : la *carte de niveau* ainsi tracée dans le plan renseigne tout aussi bien sur les propriétés de $E_p(x, y)$ que peut le faire la surface (S) (cette remarque est utilisée en cartographie pour représenter les montagnes, vallées, cols, etc., par des lignes de niveau de cote constante, c'est-à-dire des courbes équipotentielles de pesanteur).

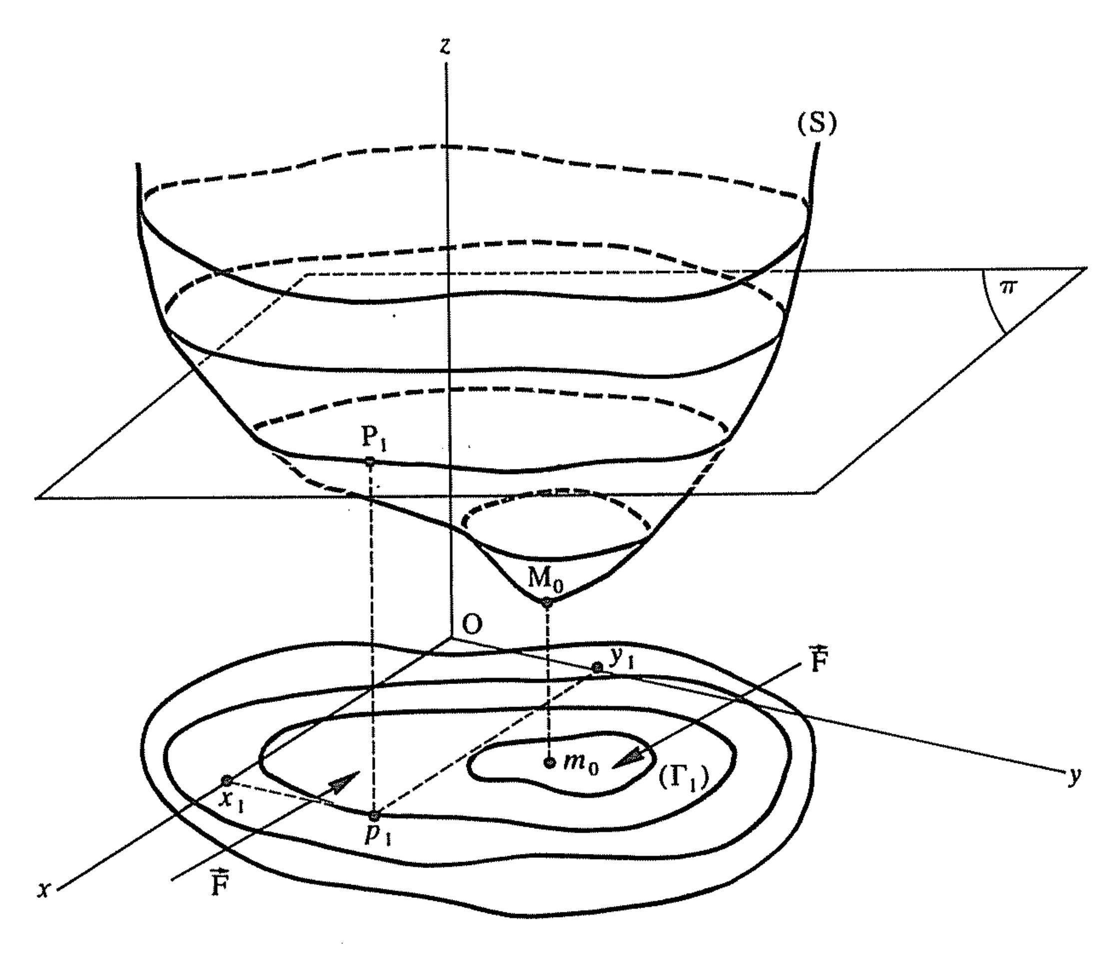



FIG. 6.14.

Comme dans le cas à une dimension, le sens de la force $\vec{F}$ appliquée à la particule P est celui qui a tendance à amener P dans la cuvette de potentiel : le support de $\vec{F}$ est donc parallèle aux lignes de plus grande pente des cartes de niveau, lignes toujours orthogonales aux courbes de niveau. Ce résultat peut se démontrer comme suit : dans un déplacement $d\vec{r}$ (d$x$, d$y$, d$z$) le long d'une ligne de niveau, on a $dE_p = 0$; or $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$; $\vec{F}$ est donc orthogonale aux lignes de niveau.

## 10. POTENTIELS DE GRAVITATION ET ÉLECTRIQUE

### 10.1 Potentiel de gravitation

Par définition, le *potentiel de gravitation* est l'énergie potentielle V associée au champ gravitationnel $\vec{G}$; on a donc la correspondance :

$$\boxed{\vec{F}_\gamma \longleftrightarrow E_p \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{G} \longleftrightarrow V.}$$

Comme $\vec{G} = \dfrac{\vec{F}}{m'}$ d'après (4.7), on a aussi :

$$\boxed{E_p = m'V \longleftrightarrow V = \frac{E_p}{m'}.} \qquad (6.28)$$

Le potentiel gravitationnel, homogène à une accélération, a pour équation aux dimensions $[V] = [L][T]^{-2}$ et son unité S. I. est le $m \cdot s^{-2}$.

1° *Cas d'un centre gravitationnel :* si $\vec{G}$ est le champ de gravitation en P d'une particule $m$, située en O ($OP = r$), de $E_p = -\gamma \frac{mm'}{r}$ (6.20), on tire :

$$\boxed{V = -\gamma \frac{m}{r}.} \qquad (6.29)$$

2° *Cas du champ de pesanteur :* pour $\vec{g}$, $E_p = mgz$ implique :

$$\boxed{V = gz.} \qquad (6.30)$$

Les graphes correspondants sont tracés sur la figure 6.15.

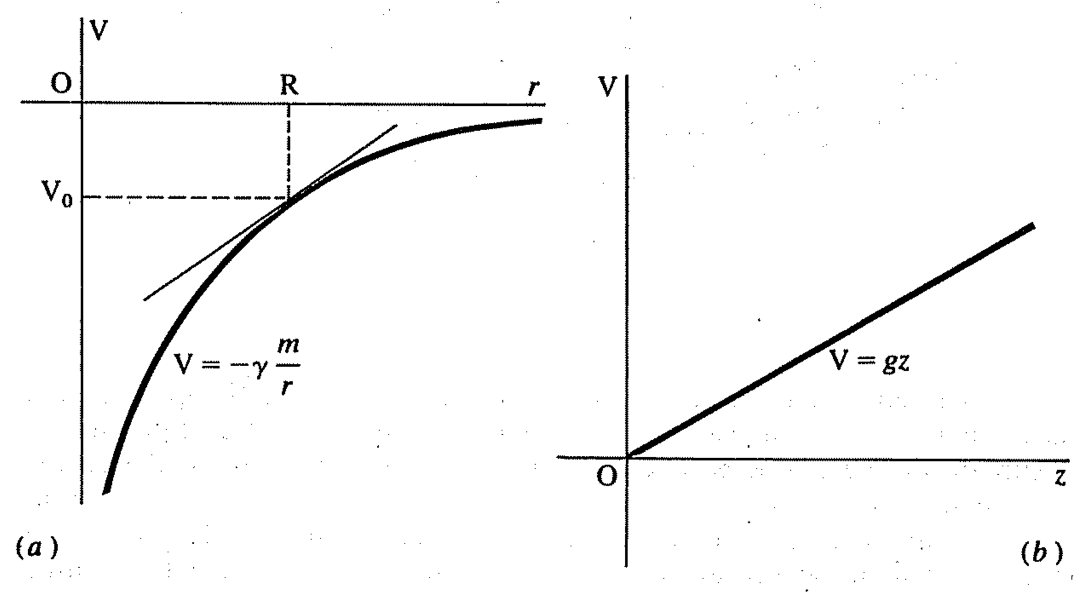



FIG. 6.15.

Entre $\vec{G}$ et V nous avons aussi les mêmes relations différentielles qu'entre $\vec{F}$ et $E_p$ :

— pour $V = \gamma \frac{m}{r}$, $\quad G = -V'(r) = -\gamma \frac{m}{r^2}$;

— pour $V = gz$, $\quad G = -V'(z) = -g$.

Il est également possible d'associer à ces potentiels des *surfaces équipotentielles* pour lesquelles V = constante :

— si $V = -\gamma \frac{m}{r}$, ces surfaces sont des sphères, centrées sur O et de rayon

$r_1$ telles que : $V = V_1 \longrightarrow r_1 = -\gamma \frac{m}{V_1}$ (fig. 6.16, a);

— si $V = gz$, ce sont des plans horizontaux de cote $z_1 = \frac{V_1}{g}$ (fig. 6.16, b).

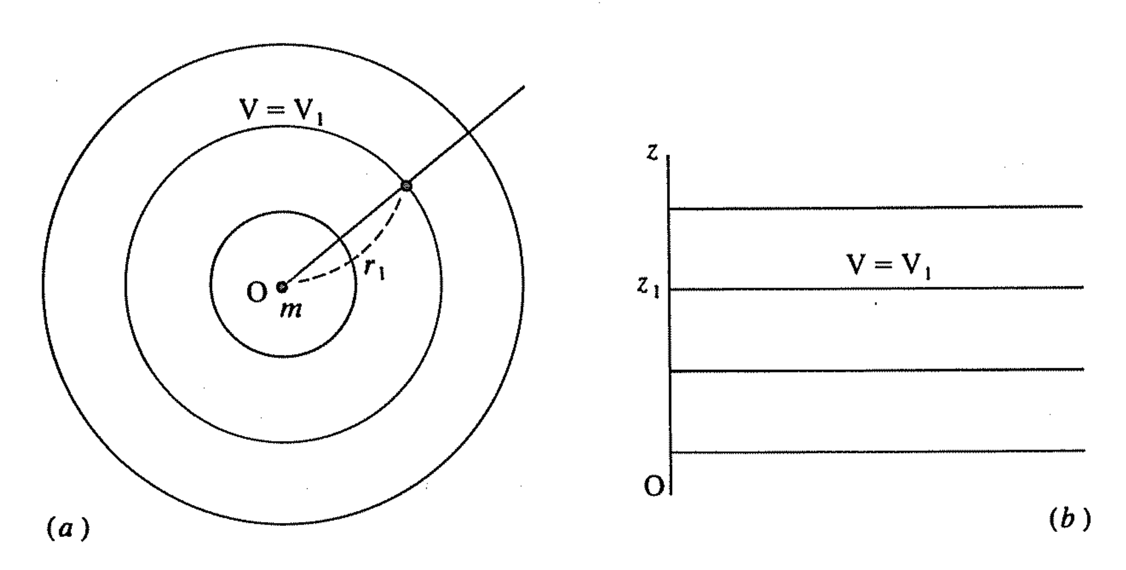



FIG. 6.16.

*Remarque :* Nous savons que le potentiel de gravitation terrestre doit s'exprimer par : $V = -\gamma \frac{M}{r}$ ou $r = R + z$ avec R le rayon terrestre et $z$ la distance de P à la surface terrestre. Comme le champ de pesanteur provient de l'interaction de gravitation terrestre, *il doit y avoir un lien entre* V *et* $gz$ *au voisinage de la surface terrestre* où $z \leqslant R$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+z} = \frac{1}{R} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{z}{R}\right),$$

entraîne : $$V = -\gamma \frac{M}{R} = -\gamma \frac{M}{R} + \gamma \frac{M}{R^2} z = V_0 + gz,$$

si l'on pose : $V_0 = -\gamma \frac{M}{R}$ et $g = \gamma \frac{M}{R^2}$ d'après (4.2).

Cette propriété entraîne (fig. 6.15) que localement, au voisinage de $r = R$, le graphe du potentiel $V = -\gamma \frac{M}{r}$ se confond avec sa tangente d'équation $V = V_0 + gz$. De plus, les surfaces équipotentielles sphériques (fig. 6.16) sont, dans les mêmes conditions, équivalentes à leurs plans tangents parallèles puisque orthogonaux à une même verticale.

## 10.2 Potentiel électrique

Par définition le *potentiel électrique* est l'énergie potentielle V associée au champ électrique $\vec{E}$, d'où la correspondance :

$$\vec{F}_K \longleftrightarrow E_p \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E} \longleftrightarrow V.$$

Comme $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q'}$ $(q' = +1C)$, d'après (4.9), on a aussi :

$$\boxed{E_p = q'V \longleftrightarrow V = \frac{E_p}{q'}.} \qquad (6.31)$$

Le potentiel électrique a pour équation aux dimensions $[V] = [M][L]^2[T]^{-2}[Q]^{-1}$ et son unité S. I. le joule/coulomb porte le nom de volt $(V = J \cdot C^{-1})$.

Selon les directions $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ du référentiel R, nous aurons entre $\vec{E}$ et V les relations différentielles :

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},} \qquad (6.32)$$

permettant de déduire $\vec{E}$ de V et réciproquement.

1° *Cas d'un champ électrique uniforme.*

Soit, par exemple, le champ uniforme $\vec{E} = (E_0, O, O)$ dirigé selon $\vec{i}$. De (6.32), il résulte : $dV = -E_0\,dx$, c'est-à-dire :

$$\boxed{V - V_0 = -E_0(x - x_0),} \qquad (6.33)$$

si $V = V_0$ en $x = x_0$ : les graphes correspondants de E et V sont tracés sur la figure 6.17, a. Là aussi nous pouvons représenter des *surfaces équipotentielles* sur lesquelles V = constante : ce sont des *plans orthogonaux* au vecteur $\vec{i}$, donc *au vecteur champ électrique* $\vec{E}$ : comme $\vec{E}$ a

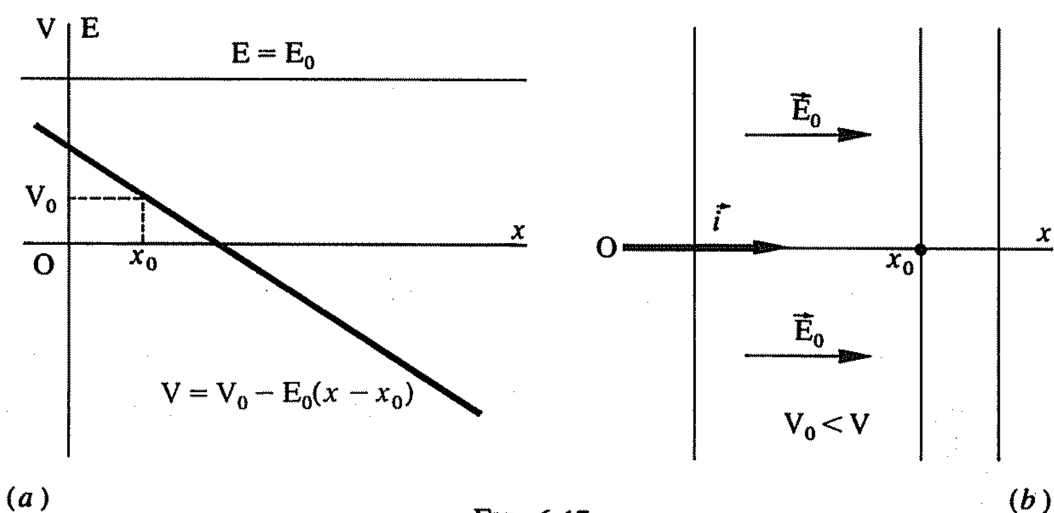



FIG. 6.17.

la même orientation que $\vec{i}$ et que V décroît quand $x$ croît, $\vec{E}$ *est dirigé selon les potentiels électriques décroissants* (fig. 6.17, b).

De $E_0 = \left|\frac{V - V_0}{x - x_0}\right|$, il résulte qu'un champ électrique peut aussi se mesurer en volt/mètre, unité équivalente au newton/coulomb :

$$\boxed{1\ V \cdot m^{-1} = 1\ N \cdot C^{-1}.} \qquad (6.34)$$

2° *Cas du potentiel électrique d'une charge ponctuelle.*
De (4.5), on tire :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2} \longrightarrow E = \frac{F}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

force centrale pour laquelle :

$$E = -\frac{dV}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Par intégration de l'équation différentielle : $dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{dr}{r^2}\right)$,

et en posant $V = 0$ quand $r = \infty$, nous obtenons :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \quad \text{si} \quad V(r = \infty) = 0.} \qquad (6.35)$$

*Ce potentiel a donc le signe de la charge q qui le produit.*

Le graphe de V pour $q < 0$ est représenté sur la figure 6.15, a : les surfaces équipotentielles correspondantes sont des sphères de rayon $r = C^{te}$ du type de la figure 6.16, a. Deux sphères de rayons proches pouvant localement être considérées comme deux surfaces planes équipotentielles, le résultat établi précédemment reste valable : *le champ électrique est dirigé selon les potentiels décroissants :* il part de la charge si $q > 0$ ($V > 0 \searrow$ quand $r \nearrow$), et se dirige vers la charge si $q < 0$ ($V < 0 \searrow$ quand $r \longrightarrow 0$).

S'il y a plusieurs charges $\{q_i\}$, on a pour le potentiel total : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$ auquel correspond le champ total $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i$.
Comme il est plus aisé d'additionner des scalaires que des vecteurs, on a donc intérêt à étudier les effets de distributions de charges grâce à leurs potentiels.

Pour ces particules il est également possible de dessiner des lignes ou des surfaces équipotentielles, les lignes de force du champ électrique étant toujours orthogonales à elles (exemple : le cas de deux charges de signes contraires est illustré par la figure 6.18 : les lignes en pointillé sont les équipotentielles et les lignes continues les lignes de forces déjà vues sur la figure 4.10).

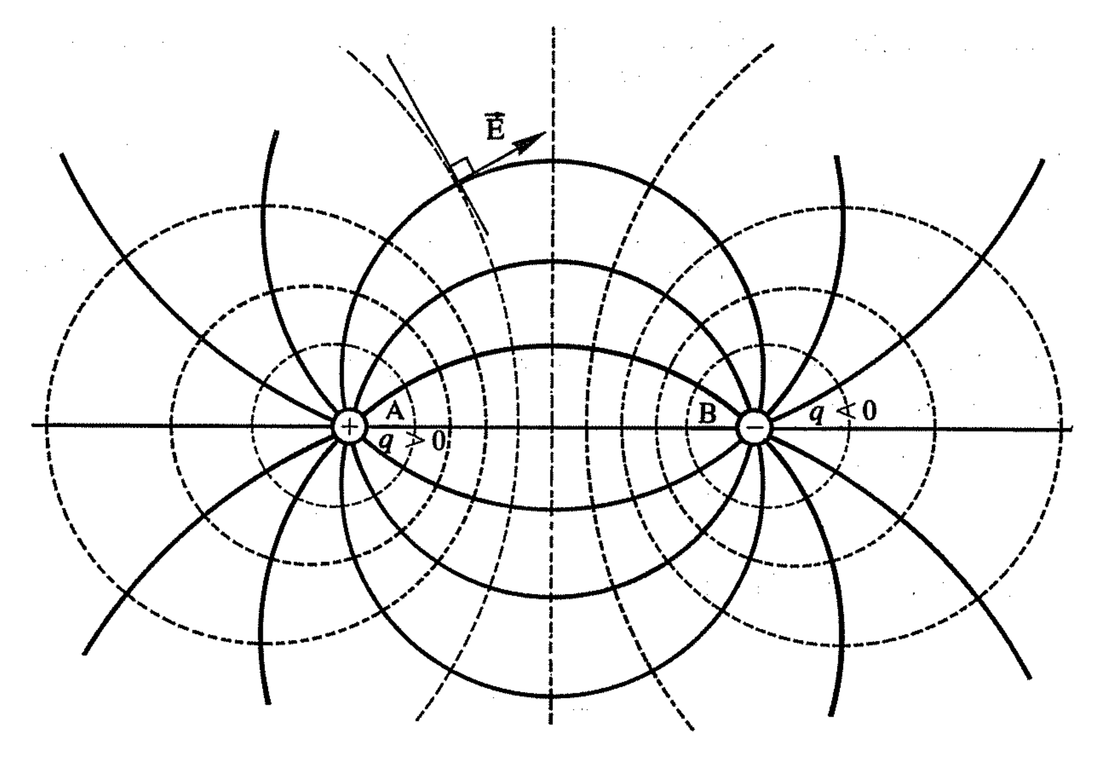



FIG. 6.18.

## 10.3 Relations énergétiques dans un champ électrique

L'énergie totale d'une particule $P(m, q)$ plongée dans un champ électrique est : $E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2} mv^2 + q V$. Si la charge $q$ se déplace de $P_1$ à $P_2$ où le potentiel électrique varie de $V_1$ à $V_2$, on aura : $\frac{1}{2} mv_1^2 + q V_1 = \frac{1}{2} mv_2^2 + q V_2$.

Le travail fourni par le champ électrique quand P se déplace de $P_1$ à $P_2$ s'écrit ainsi :

$$W = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = q(V_1 - V_2), \tag{6.36}$$

ce qui permet de définir le *volt* :

> Un *volt* (V) est la différence de potentiel électrique à travers laquelle une charge d'un coulomb doit se déplacer pour modifier son énergie cinétique d'un joule.

Une forme équivalente à (6.36) est l'expression :

$$\Delta E_c = \Delta\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = -q \Delta V, \tag{6.37}$$

expression reliant la variation d'énergie cinétique de la charge $q$ au cours de son déplacement dans un potentiel électrique. Elle permet de définir une nouvelle unité d'énergie, *l'électron-volt*, énergie que gagne un électron lorsqu'il traverse une région de l'espace où il subit une différence de potentiel de 1 volt :

$$\boxed{1 \text{ eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J},} \tag{6.38}$$

puisque $e = 1{,}602\,1 \cdot 10^{-19}$ C. Les multiples courants de l'électron-volt sont le kiloélectron-volt (keV), le megaélectron-volt (MeV) et le gigaélectron-volt (GeV).

Les relations énergétiques (6.36 et 6.37) sont utilisées — à une correction relativiste près — dans tous les accélérateurs électrostatiques de particules pour calculer la différence de potentiel nécessaire à leur accélération.

## 11. DIPOLE ÉLECTRIQUE

On appelle *dipôle électrique* un système constitué de deux particules, de charges $+q$ et $-q$, séparées par une *distance a faible devant la distance d'observation*. Si on pose $\vec{a}$ pour le vecteur joignant la charge $(-q)$ à la charge $(+q)$, on appelle *moment électrique dipôlaire* $\vec{p}$ le vecteur :

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{a},} \tag{6.39}$$

caractéristique de cette distribution de charges (fig. 6.19).

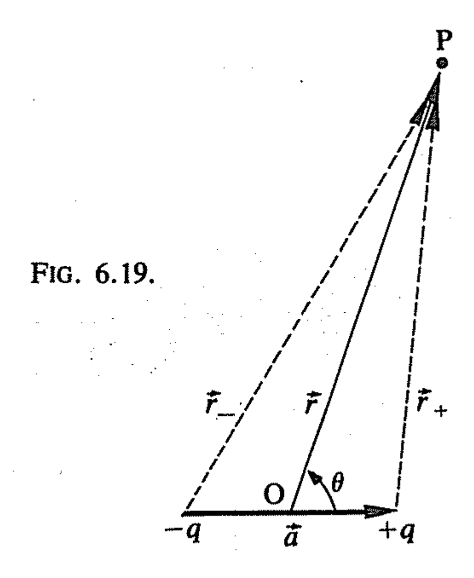



FIG. 6.19.

Le potentiel électrique du dipôle est la somme des potentiels individuels :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right),$$

où $r_+$ est la distance de $q_+$ à P et $r_-$ est la distance de $q_-$ à P.

Soit O le milieu du dipôle : posons $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ et $(\vec{a}, \vec{r}) = \theta$. Comme $a \ll r$, on peut écrire :

$$r_- - r_+ \# a \cos\theta \quad \text{et} \quad r_+ r_- \# r^2,$$

d'où :

$$\boxed{V = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2},} \tag{6.40}$$

expression du *potentiel à grande distance d'un dipôle électrique.*

Dans le plan $(-q, +q, \mathrm{P})$, P est repéré par $(r, \theta)$. Les résultats (6.24) appliqués à V nous donnent les composantes du *champ électrique dipôlaire* $\vec{E}$ :

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.} \tag{6.41}$$

Nous avons porté sur la figure 6.20 les lignes de force d'un tel dipôle.

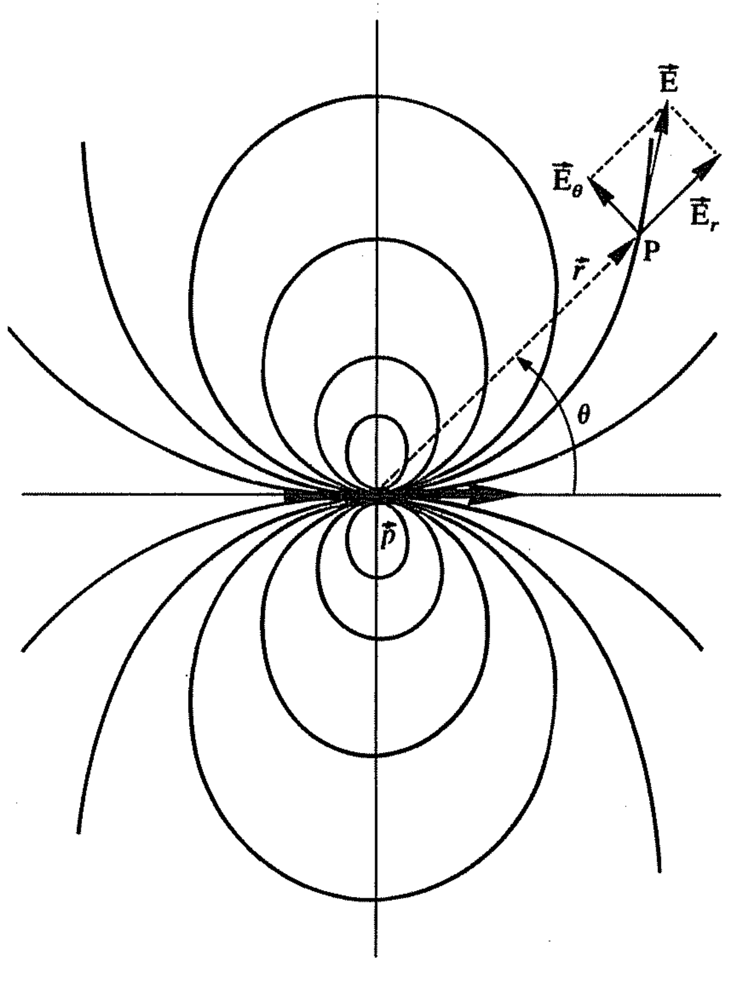



FIG. 6.20.

Si l'on a plusieurs charges $q_1$, $q_2$, ... placées aux points $P_1$, $P_2$, ..., par définition le moment électrique dipôlaire de la distribution de charge en un point P sera :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i,$$

avec $\vec{r}_i = \overrightarrow{PP}_i$, vecteur issu de P et joignant $P_i$.

De $\overrightarrow{PP}_1 = -\vec{r}_+$ et $\overrightarrow{PP}_2 = -\vec{r}_-$ si $+q$ en $P_1$, $-q$ en $P_2$, cette définition donne :

$$\vec{p} = q(-\vec{r}_+) + (-q)(-\vec{r}_-) = q(\vec{r}_- - \vec{r}_+) = q\vec{a}.$$

La notion de dipôle est très importante en physico-chimie et en biophysique; chaque fois que les barycentres des charges positives ou négatives d'un atome ou d'une molécule ne coïncident pas (de façon permanente comme dans ClH, $OH_2$, CO, etc., ou en présence d'un champ électrique extérieur capable de déplacer les charges de leurs positions d'équilibre en l'absence de champ : polarisation induite), un dipôle apparaît et est susceptible d'interagir avec l'extérieur. Cette remarque permet de comprendre notamment la solvation des ions par des solvants polaires, la spectrométrie infrarouge, les forces de Van der Waals, les propriétés diélectriques de la matière, etc.

# 7

# DYNAMIQUE DES FLUIDES ET ÉLECTROCINÉTIQUE

## 1. INTRODUCTION

### 1.1 État fluide

On sait que les corps peuvent se présenter sous plusieurs états; aux solides, de volumes et de formes invariables, s'opposent les *fluides*, *liquides* et *gaz*.

Liquides et gaz ont des propriétés analogues : ils prennent la *forme du récipient* qui les contient; l'aspect physique du liquide ne se différencie de celui du gaz que par sa surface (en l'absence de surface de séparation, il n'est pas possible de dire si une ampoule scellée contient un liquide ou un gaz). Ils diffèrent par d'autres propriétés : le gaz occupe tout le volume offert et il est compressible; par contre, une masse donnée de liquide occupe un volume à peu près constant.

### 1.2 Mouvements microscopiques et macroscopiques

Les fluides ont la propriété commune de pouvoir s'écouler. Les exemples sont nombreux : eau qui coule d'une bouteille ou d'un robinet, air autour d'une voiture, etc. Il s'agit alors de *mouvements macroscopiques* : des molécules voisines se déplacent avec des vitesses voisines à la fois en grandeur et en direction. Ces mouvements peuvent facilement être observés si le fluide contient des particules étrangères en suspension (poussières, fumées, etc.).

Au mouvement d'ensemble des molécules du fluide se superposent leurs mouvements individuels, complètement désordonnés. Ces *mouvements microscopiques* font l'objet du chapitre sur la théorie cinétique des gaz; cependant, certains effets importants pour le comportement macroscopique du fluide seront considérés ci-dessous :

*a*) la pression résulte du «martèlement» d'un élément de paroi par les molécules;

*b*) la viscosité, dont le mécanisme sera décrit plus loin, se traduit par une force de frottement entre couches de fluide de vitesses voisines. (La

diffusion et la conduction thermique résultent aussi de ces mouvements microscopiques.)

La viscosité, associée au mouvement, n'intervient pas en *statique des fluides*; les mêmes lois s'appliquent donc à tous les fluides immobiles.

L'étude du mouvement d'un *fluide parfait* (sans viscosité, ou sans frottement) donne des résultats valables aussi pour les fluides réels peu visqueux.

### 1.3 Fluides ioniques et électroniques

Les ions dans une solution, les électrons dans un solide conducteur, peuvent être assimilés aux molécules d'un fluide. L'application d'un champ électrique permet de leur imposer un mouvement d'ensemble.

Les forces de frottement conduisent à des lois semblables à celles que suivent les fluides réels, mais leur origine est sensiblement différente : chaque ion (ou électron) est freiné par les chocs contre les molécules du solvant (ou contre les ions fixes du solide conducteur).

STATIQUE DES FLUIDES

## 2. STATIQUE DES FLUIDES

### 2.1 Notion de pression

Plaçons une surface petite dans un *fluide au repos*, c'est-à-dire en équilibre, par exemple une membrane tendue sur un cadre (fig. 7.1). Elle est soumise de la part du fluide à deux forces égales et opposées $\vec{F}$ et $\vec{F}'$, normales à S.

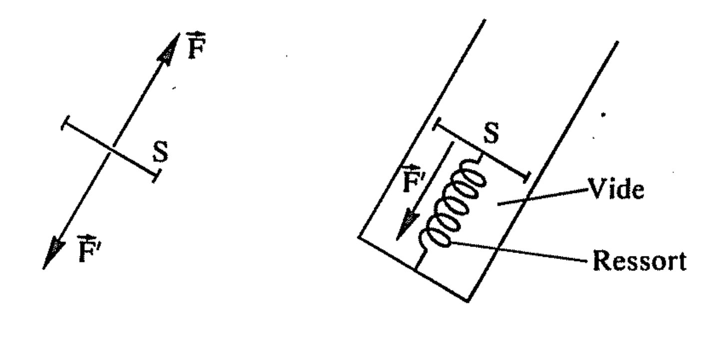



FIG. 7.1. FIG. 7.2.

On peut mettre en évidence pour l'une des deux forces, sa valeur et sa direction en supprimant la force opposée ou plutôt en la compensant par un autre moyen (fig. 7.2).

F (ou F′) étant naturellement proportionnelle à S, on définit la pression $p$ par l'égalité :

$$\boxed{p = \frac{F}{S}.} \qquad (7.1)$$

Il est évident que la pression est liée à la présence de matière : *en l'absence de matière,* $p = 0$.

L'équation aux dimensions de la pression est $[p] = [M][L]^{-1}[T]^{-2}$ et son unité de mesure dans le Système International est le *pascal* ($Pa = N \cdot m^{-2}$). C'est une pression très faible; dans la pratique, on utilise des multiples qui seront définis au paragraphe suivant.

On remarquera que la pression a été définie comme une grandeur scalaire alors qu'une force est une grandeur vectorielle. La raison pour cela est qu'*à une altitude donnée, la pression est indépendante de l'orientation de la surface qui sert à la définir.*

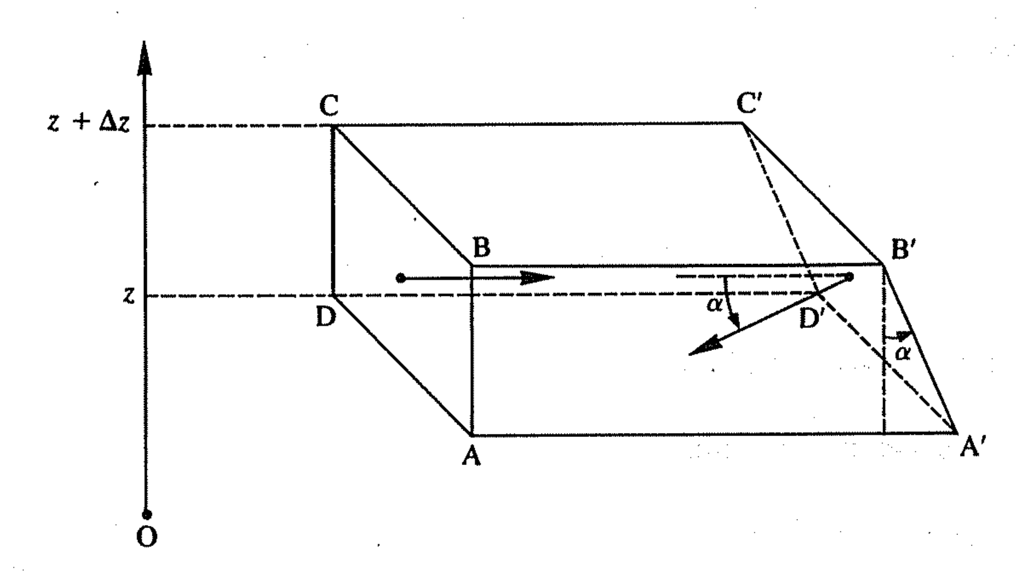



FIG. 7.3.

Considérons (fig. 7.3) l'élément de fluide compris dans le volume ci-contre : la face ABCD est verticale, la face A′B′C′D′ fait l'angle $\alpha$ avec la verticale; les faces ABB′A et DCC′D′ sont verticales; enfin les faces ADD′A′ et BCC′B sont horizontales. Puisque cet élément est en équilibre, la résultante des forces qu'il subit est nulle. Cette résultante a pour composantes horizontales :

— suivant la direction $\overrightarrow{AD}$ : $+(pS)_{ABB'A'} - (pS)_{DCC'D'}$; comme les surfaces de ABB′A′ et de DCC′D′ sont égales, on retrouve le résultat a priori évident : $p_{ABB'A'} = p_{DCC'D'}$;

— suivant la direction $\overrightarrow{AA'}$ : $+(pS)_{ABCD} - (pS)_{A'B'C'D'} \cos\alpha$ ; comme $AB = A'B' \cos\alpha$, on a : $AB \times BC = A'B' \cos\alpha \times B'C'$ ou encore $S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} \cos\alpha$ ; on en déduit que : $p_{ABCD} = p_{A'B'C'D'}$ ce qui démontre le résultat annoncé.

Le bilan des forces verticales permet de retrouver, d'une manière un peu plus compliquée, le théorème démontré au paragraphe suivant.

## 2.2 Théorème fondamental de l'hydrostatique

Écrivons que le cylindre de fluide représenté dans la figure 7.4 est en équilibre. Les forces de pression qui s'exercent sur la surface latérale sont

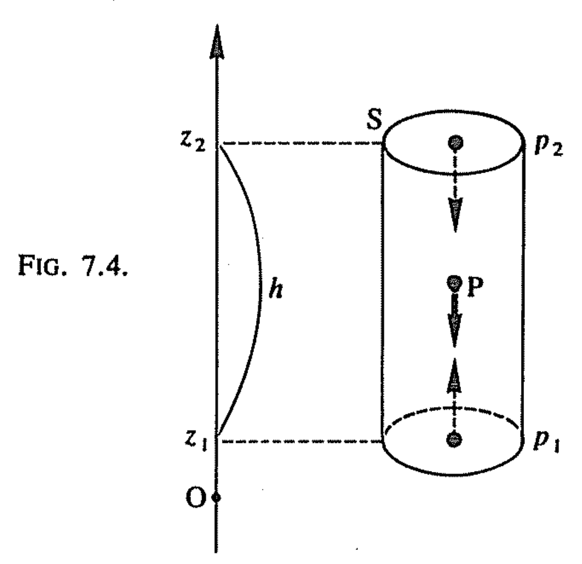



FIG. 7.4.

horizontales; elles n'interviennent pas dans le bilan des forces verticales. Celles-ci comprennent :
— la force de pression sur la paroi inférieure : $+p_1S$;
— la force de pression sur la paroi supérieure : $-p_2S$;
— le poids P du fluide contenu dans le cylindre :

$$P = \text{masse} \times g = -\rho S(z_2 - z_1)g,$$

où $\rho$ désigne la masse volumique.

Le fluide étant en équilibre, on doit avoir :

$$p_1S - p_2S - \rho S(z_2 - z_1)g = 0,$$

soit :

$$\boxed{p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2;} \qquad (7.2)$$

ou encore, en faisant apparaître la hauteur $h$ de fluide entre 1 et 2 :

$$\boxed{p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1) = \rho g h.} \qquad (7.3)$$

Ainsi, dans un fluide en équilibre, la différence de pression entre deux points ne dépend que de la différence $h$ de leurs cotes et de la masse volumique. Rappelons quelques applications de ce résultat :

1° *la pression atmosphérique :* elle peut être mise en évidence par l'expérience de Torricelli (fig. 7.5). La pression est la même en B et en C($z_B = z_C$). En C, s'exerce la pression de l'atmosphère; en B, s'exerce la pression de la colonne de mercure BA. On a :

$$p_B - p_A = h\,\rho_{Hg}\,g.$$

Or, $p_B = p_C = 1$ atm et $p_A = 0$, donc :

$$1 \text{ atm} = (0{,}76 \text{ m}) \times (13{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \times (9{,}81 \text{ m/s}^2);$$

$$\boxed{1 \text{ atm} = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Pa.}}$$

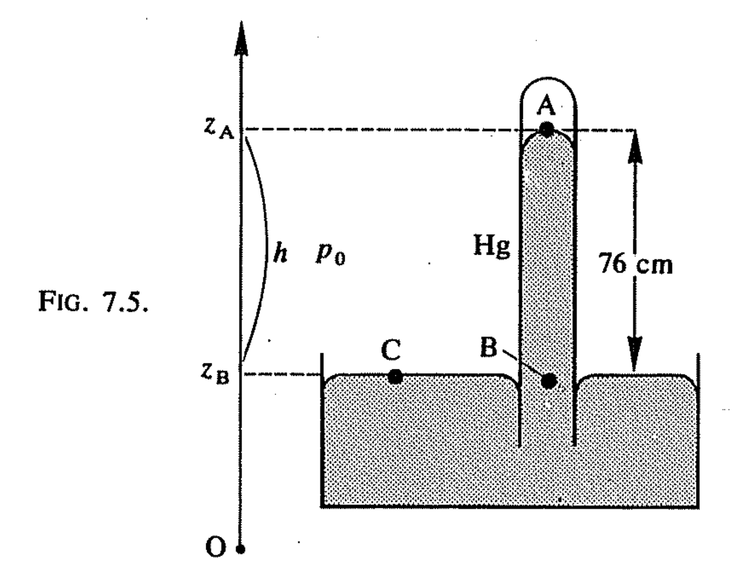



FIG. 7.5.

On utilise encore comme unité de pression le kg·force/cm² (kgf/cm²) qui vaut : $(1\ \text{kg})\cdot(9{,}81\ \text{m/s}^2)/(10^{-4}\ \text{m}^2) = 0{,}981\cdot 10^5$ pascals.

Ces unités (atm, kgf/cm²) sont très voisines de $10^5$ pascals; aussi a-t-on introduit *le bar*, unité courante de pression telle que :

$$\boxed{1\ \text{bar} = 10^5\ \text{pascals},}$$

et on a :

$$1\ \text{atm} = 1\,013\ \text{mbar} = 1{,}013\ \text{bar}, \quad 1\ \text{kgf/cm}^2 = 0{,}981\ \text{bar},$$

soit, très sensiblement :

$$\boxed{1\ \text{atm} \sim 1\ \text{kgf/cm}^2 \sim 1\ \text{bar}.}$$

2° *Siphon :* la situation représentée sur la figure 7.6 ne peut être une situation d'équilibre; en effet, on aurait à l'équilibre :

$$p_A = p_B = p_0 \quad \text{et} \quad p_C = p_0,$$

et on devrait aussi avoir : $p_C - p_B > 0$ : il y a donc mouvement. Le fluide va de A vers C, de manière à abaisser l'énergie potentielle du liquide.

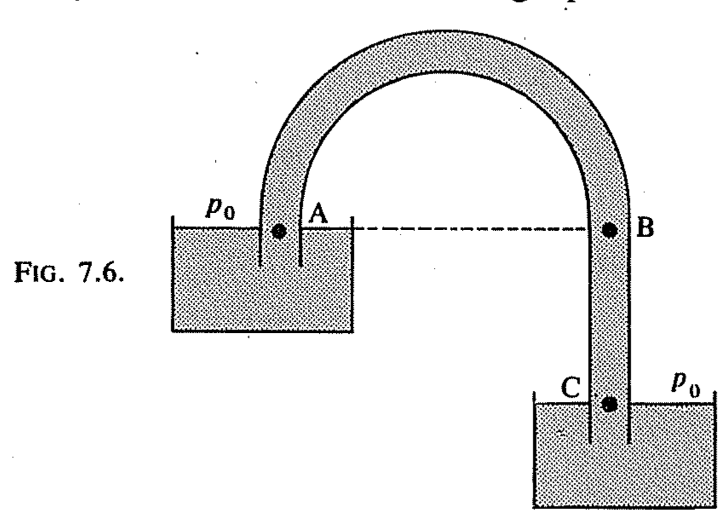



FIG. 7.6.

Le siphon fonctionnera tant que la pression restera positive en tout point du liquide.

3° *Principe de Pascal : une modification* $\Delta p$ *de la pression en un point d'un fluide incompressible est transmise intégralement.*

Ce résultat découle immédiatement de la relation :

$$(p_1 + \Delta p) - (p_2 + \Delta p) = p_1 - p_2 = h\rho g.$$

L'application la plus directe de ce principe est la presse hydraulique.

## 2.3 Poussée d'Archimède

Isolons par la pensée une partie du fluide délimitée par une surface fermée S contenant un volume V (fig. 7.7). Elle est en équilibre. Or, elle est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et aux forces de pression qui s'exercent sur sa surface S (petites flèches sur la figure). La résultante $\vec{\pi}$ de ces dernières est donc égale et opposée à $\vec{P}$.

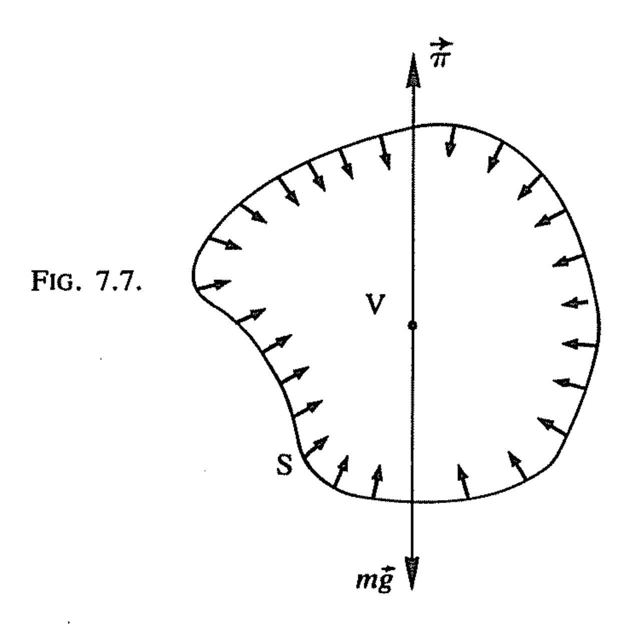



FIG. 7.7.

La substitution à cette partie du fluide d'un corps étranger de même forme et maintenu par un moyen quelconque à la place occupée par V ne change rien au résultat : *il est soumis de la part du fluide à une force égale et opposée au poids du fluide déplacé.*

Cette résultante des forces de pression subies par un corps étranger est la *poussée d'Archimède* (3<sup>e</sup> siècle avant J.-C.).

Ce résultat s'étend facilement au cas de plusieurs fluides : la poussée totale est égale à la somme des poussées partielles dues à chacun des fluides (un bateau bénéficie de la poussée de l'eau pour sa partie immergée, de la poussée de l'air pour sa partie émergée).

## 3. DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

### 3.1 Définitions : lignes et tubes de courant; débit et conservation de la matière

On considère ici un fluide *parfait, incompressible, en mouvement stationnaire.* On entend par cette dernière précision que les trajectoires décrites par les molécules se répètent au cours du temps identiques à elles-mêmes; une telle trajectoire est une *ligne de courant* (fig. 7.8), elle est évidemment tangente à la vitesse du fluide en chacun de ses points. Les lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé (C) constituent *un tube de courant* et le fluide s'écoule dans le tube comme si ses parois étaient solides.

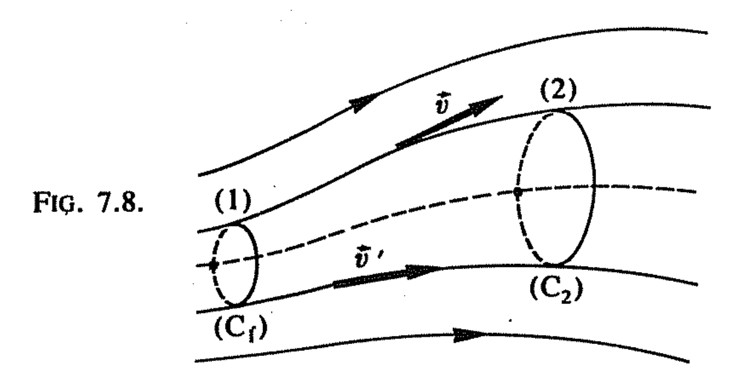



FIG. 7.8.

Le débit d'un tube est le volume (*débit volumique* $D_V$) ou la masse (*débit massique* $D_m$) qui traverse une section du tube par unité de temps. Entre les deux débits, on a la relation :

$$\boxed{D_m = \rho D_V.} \tag{7.4}$$

Le fluide reste «enfermé» dans le tube; par conséquent, le débit est le même en toute section du tube :

$$\boxed{D_m^{(1)} = D_m^{(2)}, \quad D_V^{(1)} = D_V^{(2)}, \quad (\rho = C^{te}),} \tag{7.5}$$

et ce résultat exprime la *conservation de la matière* dans un tube de courant.

*Si le tube est assez étroit*, on peut considérer que la vitesse est la même en tout point d'une section droite; le fluide (fig. 7.9) qui traverse la section (1) pendant la durée $\Delta t$ est contenu dans un cylindre de base $S_1$ et de hauteur $v_1\Delta t$ ; son volume est $\Delta V_1 = S_1 v_1 \Delta t$. Le débit volumique à travers la section (1) est :

$$D_V^{(1)} = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = S_1 v_1 .$$

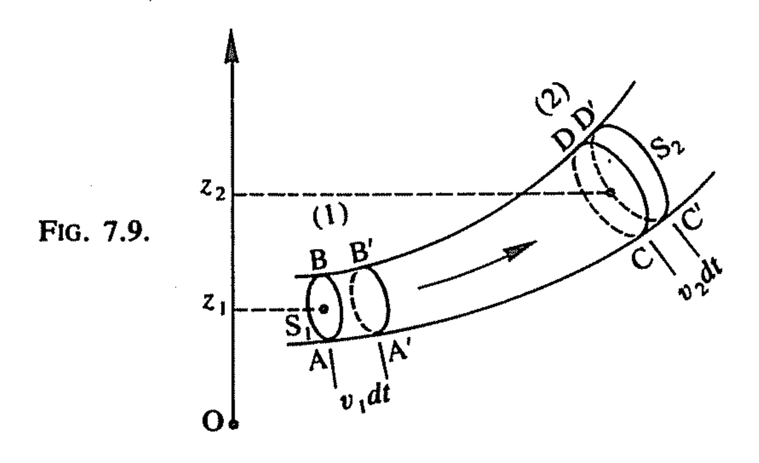



FIG. 7.9.

Puisque $D_V = C^{te}$ pour un tube, on a :

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2.}$$

*La vitesse varie en raison inverse de la section; si S augmente, v diminue et vice versa.*

## 3.2 Théorème de Bernoulli

Calculons le travail des forces appliquées au fluide qui se déplace de ABCD à A'B'C'D' (fig. 7.9) :
— la pression fournit un travail moteur en (1) : $(p_1 S_1)(v_1\,dt)$ et un travail résistant en (2) : $-(p_2 S_2)(v_2\,dt)$;
— les forces de pression sont normales à la paroi du tube; leur travail durant l'écoulement du fluide dans le tube de force est donc nul;
— les forces de pesanteur fournissent le travail nécessaire pour amener la masse $dm(=\rho S_1 v_1\,dt = \rho S_2 v_2\,dt)$ de la cote $z_1$ à la cote $z_2$, soit $g\,dm(z_1 - z_2)$.

Le travail total est donc :

$$p_1 S_1 v_1\,dt - p_2 S_2 v_2\,dt + g\,dm(z_1 - z_2) = S_1 v_1\,dt\left[p_1 - p_2 + \rho g(z_1 - z_2)\right].$$

Ce travail produit une variation de l'énergie cinétique du fluide; or, celle du fluide compris entre A'B' et CD ne change pas; la variation d'énergie cinétique se réduit donc à :

$$E_c(\text{CDC'D'}) - E_c(\text{ABA'B'}) = \frac{1}{2}\,dm(v_2^2 - v_1^2) = S_1 v_1\,dt\left[\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)\right].$$

En identifiant les deux expressions, on obtient :

$$p_1 - p_2 + \rho g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2),$$

ou encore :

$$\boxed{p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = C^{te}.} \qquad (7.6)$$

Cette relation constitue le *théorème de Bernoulli*.

*Remarques :* 1° On peut démontrer en fait que la quantité $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2$ est constante, non seulement le long d'une ligne de courant, mais encore dans tout le fluide en écoulement stationnaire.

2° La quantité $\frac{1}{2}\rho v^2$ est l'énergie cinétique de l'unité de volume; $\rho g z$ est l'énergie potentielle, due à la pesanteur, de cette même unité de volume : en comparant la relation de Bernoulli avec la relation $E_c + E_p = C^{te}$, on en déduit que l'énergie potentielle par unité de volume *due à la pression* est $p$ et l'énergie potentielle totale : $p + \rho g z$.

On peut alors écrire les *équations du mouvement pour une unité de volume :*

$$F_x = \rho \dot{v}_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$F_y = \rho \dot{v}_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$F_z = \rho \dot{v}_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g.$$

## 3.3 Applications du théorème de Bernoulli

1° Pour le fluide au repos ($v = 0$), on retrouve la loi fondamentale de la statique :

$$p + \rho g z = C^{te}.$$

Il en est de même pour un fluide se déplaçant à vitesse constante et uniforme dans tout l'espace ($v = C^{te} \longrightarrow p + \rho g z = C^{te}$).

2° Si le fluide se déplace *horizontalement*, on a : $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$.

Appliquons cette relation à l'écoulement représenté sur la figure 7.10. Loin de l'étranglement, on mesure la pression $p_1$; à l'étranglement, on mesure $p_2$. On a les relations :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{et} \quad D_V = S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

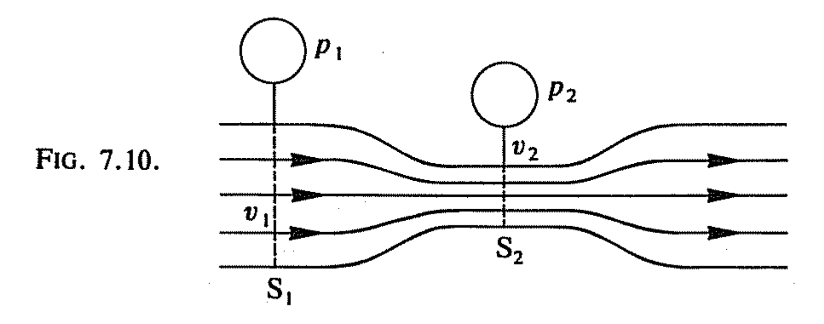



FIG. 7.10.

Puisque $S_1 > S_2$, $v_1 < v_2$ et $p_1 > p_2$ : *la pression est plus faible au niveau de l'étranglement*.

En remarquant que $v_1 = \frac{D_V}{S_1}$ et $v_2 = \frac{D_V}{S_2}$, on obtient :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{D_V}{S_1}\right)^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{D_V}{S_2}\right)^2,$$

et :
$$D_V = \sqrt{\frac{2S_1^2S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}}\sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho}} = K\sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho}};$$

K ne dépend que de $S_1$ et $S_2$. Connaissant $\rho$, on déduit $D_V$ de la mesure de $p_1 - p_2$. Ce dispositif est appelé *jauge de Venturi*.

3° Si l'étranglement est très marqué, la pression $p_2$ peut être très basse. Cette remarque est mise à profit dans la trompe à eau (fig. 7.11); ce dispositif très simple et bon marché se branche sur un robinet d'eau : il permet d'obtenir une pression de quelques cm d'eau (rappel : 1 atm ~ 10 m d'eau).

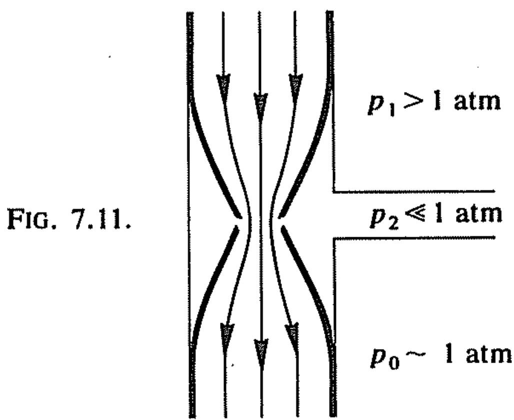



FIG. 7.11.

4° *Mesure de la vitesse d'un fluide.* Supposons encore le fluide en écoulement à vitesse $v$ uniforme et horizontale (fig. 7.12, a). Plaçons dans ce fluide un cylindre d'axe $\Delta$ parallèle à la vitesse (les bords vifs du cylindre sont supposés adoucis pour ne pas provoquer l'apparition de tourbillons); les lignes de courant du nouvel écoulement sont représentées sur la figure 7.12, b : à grande distance de l'obstacle, elles se confondent avec celles de la figure 7.12, a.

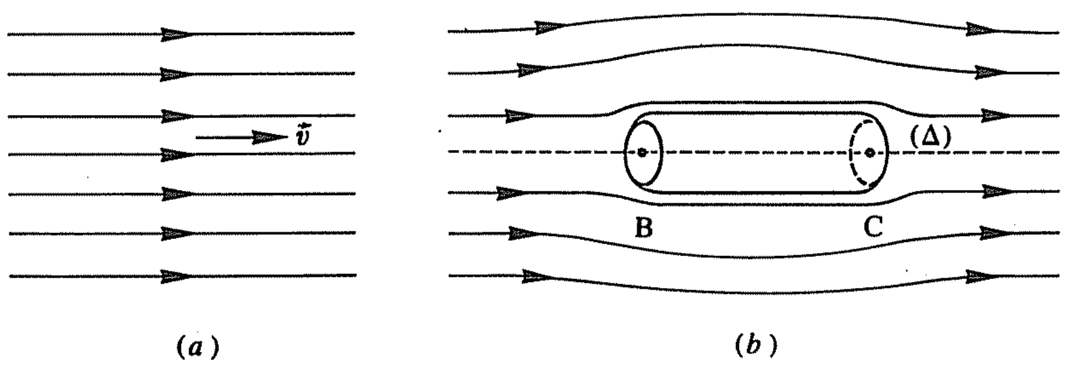



FIG. 7.12.

Aux points B et C, centres des deux bases (fig. 7.13), la vitesse est nulle. En $B_1$ et $C_1$, proches de B et C respectivement, on a $v_{B_1} = v_{C_1} \sim 0$. On a donc :

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_{B_1} + 0 = p_{C_1} + 0.$$

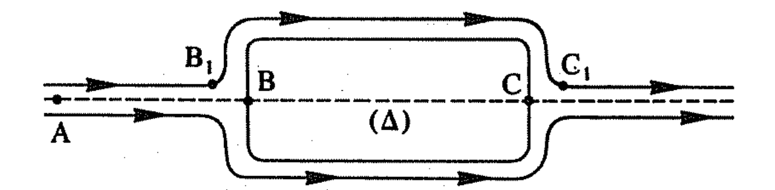



FIG. 7.13.

Ainsi, *aux points où la vitesse s'annule, la pression est augmentée de* $\frac{1}{2}\rho v^2$; cette quantité est souvent appelée *pression dynamique.*

Si on place le cylindre avec l'axe Δ perpendiculaire à la vitesse (fig. 7.14), les lignes de courant qui passent près des deux bases sont peu perturbées. On a alors $v_D \sim v_A = v$ et $p_D = p_A$. La mesure de $p_B - p_D \left( = \frac{1}{2}\rho v^2 \right)$ permet de calculer $v$. Cette quantité vaut, pour de l'eau avec $v = 10$ m/s (36 km/h) :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}(10^3)(10^2) = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

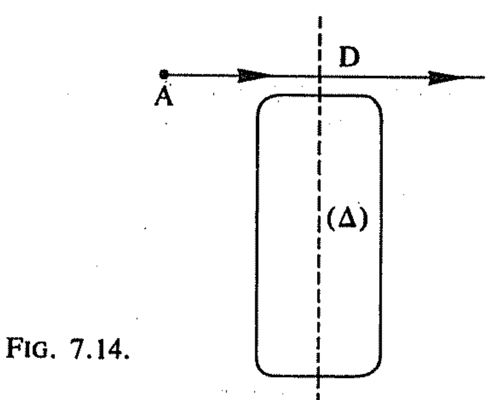



FIG. 7.14.

5° *Écoulement d'un fluide d'une enceinte sous pression*

Dans la situation représentée sur la figure 7.15, on peut considérer une ligne de courant partant d'un point A à l'intérieur où la vitesse est nulle; si on suppose que le fluide sortant en B se met immédiatement à la pression $p_E$, on écrira (en supposant que $z_A = z_B$) :

$$p_I + 0 = p_E + \frac{1}{2}\rho v_E^2, \quad \text{d'où :} \quad v_E = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_I - p_E)}.$$

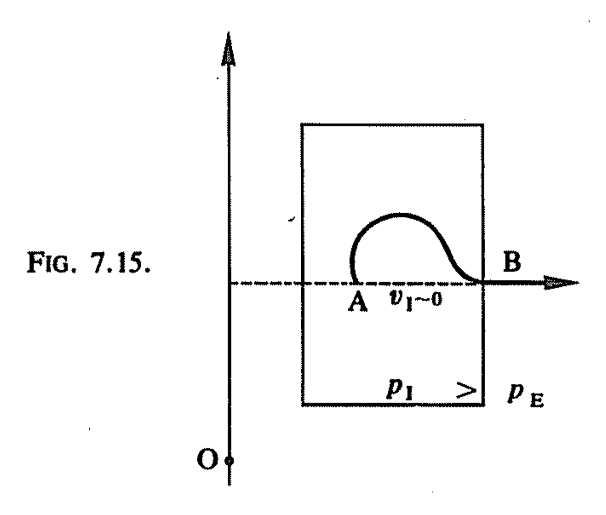



FIG. 7.15.

Pour de l'air sortant d'une bouteille à 200 bars :

$$v = \sqrt{\frac{2}{1,3}(200 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5)} \sim 5,5\ 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \sim 2 \cdot 10^4\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1},$$

vitesse très largement supersonique! (En réalité, le phénomène est plus complexe : l'air n'est pas incompressible, il subit une détente adiabatique, etc.)

## 4. DYNAMIQUE DES FLUIDES RÉELS

### 4.1 Introduction

On a déjà dit (§ 1.2) que le mouvement microscopique accompagne le mouvement d'ensemble du fluide. Considérons (fig. 7.16) deux couches contiguës du fluide S et I, animées de vitesses parallèles à O$x$ légèrement différentes, avec $\vec{v}_S > \vec{v}_I$ par exemple. Le mouvement microscopique se traduit par un échange continu de molécules entre les deux couches. Quand une molécule passe de S à I, sa quantité de mouvement moyenne selon O$x$

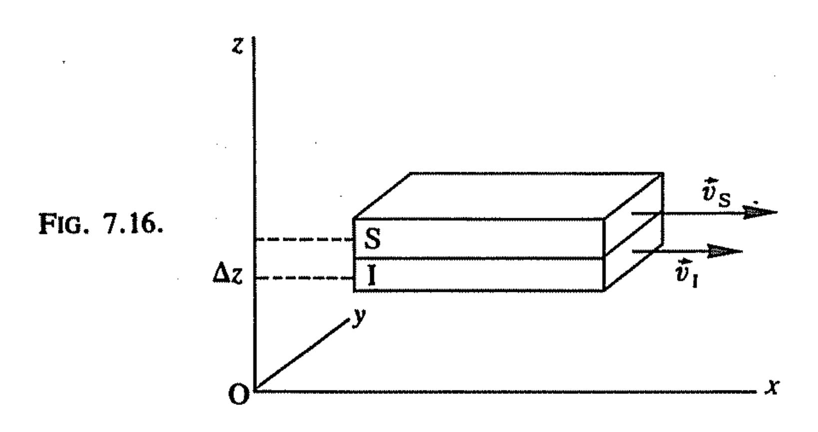



FIG. 7.16.

décroît par suite de ses chocs avec les molécules de I : la quantité de mouvement de I (selon O$x$) s'en trouve augmentée d'autant. Ainsi, par les molécules qui diffusent de S à I, I est soumise de la part de S à une force

parallèle et de même sens que $\vec{v}_S$; de même S est soumise par son contact avec I à une force parallèle, mais opposée à $\vec{v}_S$. La force exercée par une couche sur l'autre n'est plus normale à la surface de séparation, comme c'était le cas pour un fluide parfait. Il s'ensuit que, *dans l'écoulement stationnaire d'un fluide réel, la vitesse varie progressivement d'un point à un autre* dans une direction normale au sens de l'écoulement (si ce n'était pas le cas, une couche rapide entraînerait une couche voisine plus lente jusqu'à lui donner une vitesse proche de la sienne); donc, *au voisinage d'une paroi, la vitesse d'un fluide réel est nulle* (dans le cas d'un fluide parfait, la présence d'une paroi impose seulement à la vitesse d'être parallèle à la paroi).

## 4.2 Définition de la viscosité; ordres de grandeur; forces entre couches adjacentes

Reprenons la situation illustrée ci-dessus (fig. 7.16); la force qu'exerce S sur I est donc parallèle à O$x$, comme les vitesses $\vec{v}_I$ et $\vec{v}_S$; elle est proportionnelle à la surface de séparation $\Sigma$; elle est d'autant plus importante que $\Delta v_x = v_S - v_I$ est plus grand pour un écartement $\Delta z$ donné; or $\frac{\Delta v_x}{\Delta z} \sim \frac{\partial v_x}{\partial z}$. On écrit finalement :

$$\boxed{F_x = \eta \Sigma \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad \text{ou} \quad \frac{F}{\Sigma} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}.} \tag{7.7}$$

*Remarque :* On s'est contenté d'écrire la norme de la force; d'autre part, les forces exercées par S sur I, ou par I sur S, sont évidemment égales et opposées.

Le coefficient $\eta$ apparu dans (7.7) est appelé *coefficient de viscosité* du fluide; il dépend naturellement du fluide et de la température (voir ci-dessous). $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ est l'inverse d'un temps; $\eta$ a donc la dimension : force × temps/surface ou encore masse/longueur × temps c'est-à-dire [M] $[L]^{-1}[T]^{-1}$.Comme $\frac{F}{\Sigma}$ a la dimension d'une pression, $\eta$ a aussi la dimension pression × temps. Dans le système MKSA, l'unité de mesure de $\eta$ est le *Poiseuille* (Pl) :

$$\boxed{1 \text{ Pl} = 1 \text{ kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-1} = 1 \text{ Pa} \times \text{s}.}$$

Afin de fixer les idées, donnons quelques valeurs de $\eta$ (en Pl) à 20 °C :

| benzène | eau | alcool éthylique | glycérine |
|---|---|---|---|
| $0{,}65 \cdot 10^{-3}$ | $1 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ | 1,5 |

Pour les liquides (fig. 7.17), $\eta$ diminue quand la température augmente; leur *fluidité* $\left(\frac{1}{\eta}\right)$ augmente avec T. Pour les gaz, au contraire, $\eta$ augmente avec T.

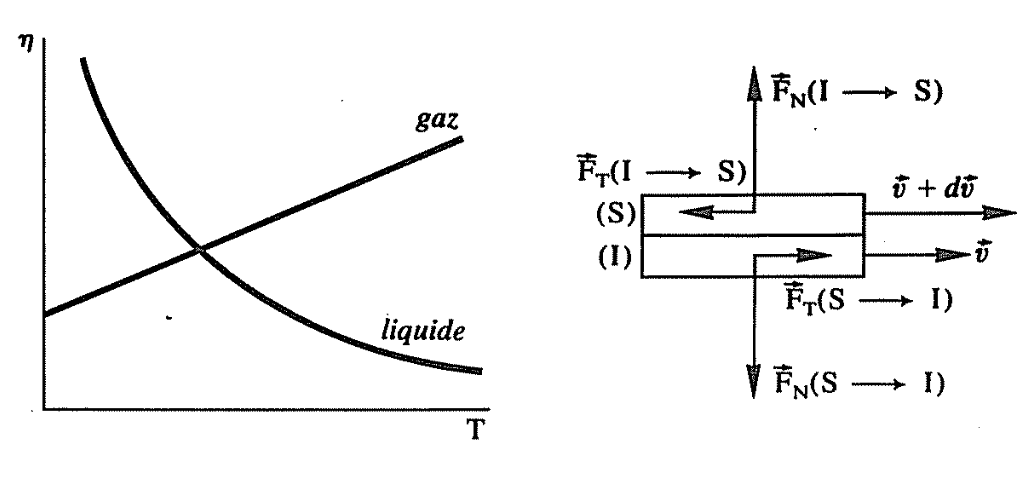



FIG. 7.17. FIG. 7.18.

Terminons ce paragraphe en comparant les forces qui interviennent dans un fluide réel (fig. 7.18) : la force $F_T$ due à la viscosité, parallèle à la surface de séparation, et la force de pression $F_N$, normale à la surface de séparation :

*Le rapport* $\dfrac{F_T}{F_N} = \dfrac{\eta \Sigma \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)}{P\Sigma} = \dfrac{\eta}{P}\dfrac{\partial v_x}{\partial z}$ *est toujours faible.* Par exemple, pour de la glycérine, avec $\Delta v_x = 1$ m/s pour $\Delta z = 1$ cm, et $p = p_0$, on obtient :

$$\frac{F_T}{F_N} \# \frac{\eta}{P}\frac{\Delta v_x}{\Delta z} \sim \frac{1,5}{10^5}\left(\frac{1}{10^{-2}}\right) = 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

## 4.3 Exemples d'écoulement. Loi de Poiseuille

1° *Écoulement entre deux plans horizontaux*

Soit un liquide réel s'écoulant sur un plan horizontal en régime stationnaire. Au contact de la paroi $P_1$, sa vitesse est nulle et la pression vaut $p_0$. Au-dessus de la surface libre horizontale $P_2(z = z_2)$ du fluide, il y a par exemple de l'air (fig. 7.19).

Considérons maintenant, un élément de liquide $dV$ compris entre deux plans parallèles à $P_1$ et $P_2$, d'épaisseur $dz$ et de surface égale à 1. Il est soumis à son poids de composantes $(0, -\rho g dz)$, aux forces de pression sur ses deux faces $\big(0, p(z) - p(z + dz) = -dp = -p'(z)dz\big)$, enfin aux forces de viscosité, parallèles à $Ox$, égales à : $\eta \dfrac{\partial v}{\partial z}(z + dz)$ pour la face

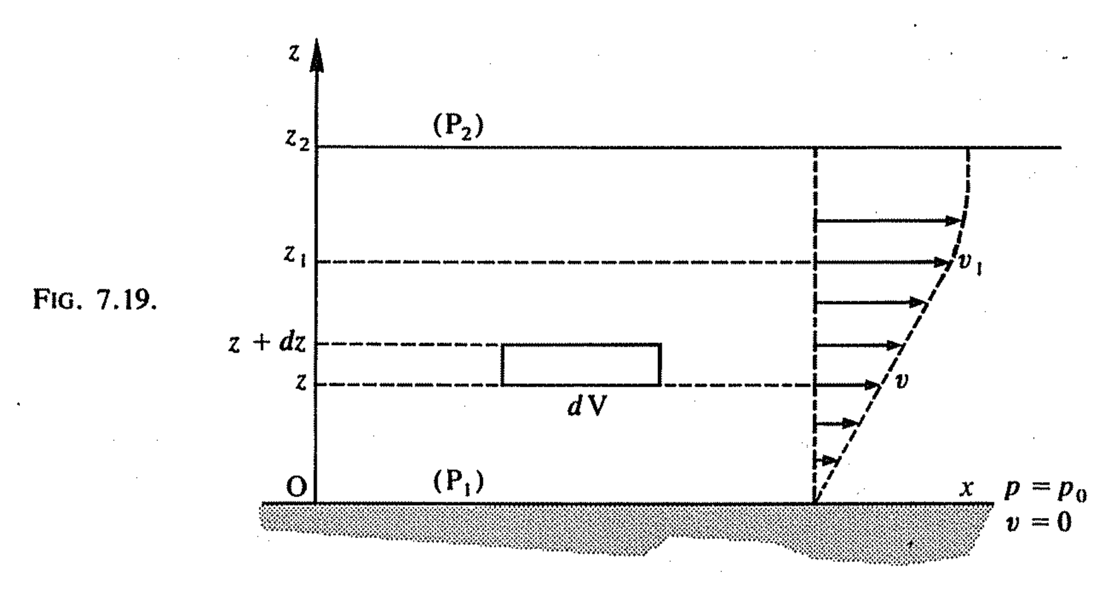



FIG. 7.19.

supérieure, $-\eta \frac{\partial v}{\partial z}(z)$ pour la face inférieure. En régime stationnaire où les forces s'équilibrent, on doit donc avoir :

$$p'(z) + \rho g = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial z}(z + dz) - \frac{\partial v}{\partial z}(z) = 0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = a, \forall z,$$

d'où : $\quad p = C^{te} - \rho g z \quad$ et $\quad v = az + b, \quad (a, b = C^{tes})$.

Or, en $z = 0$, $v = 0$, $p = p_0$. Si pour $z = z_1 < z_2$, $v = v_1$, on en déduit que : $p = p_0 - \rho g z$ et $v = \left(\frac{z}{z_1}\right) v_1$. Les flèches sur la figure 7.19 illustre la distribution des vitesses dans ce type d'écoulement.

> *Remarque :* Cette distribution des vitesses n'est plus correcte au voisinage de la surface ($z = z_2$) du liquide, car la force de viscosité de l'air étant presque nulle, il en est de même dans le liquide proche de la surface :
>
> $$F_x = 0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial z}(z \# z_2) = 0 \neq a.$$

2° *Écoulement dans une conduite cylindrique horizontale. Loi de Poiseuille*

On n'indiquera ici que les principales étapes du calcul. On démontre que $p$ ne dépend que de $x$ et que $p'(x) = -k$ ($k = C^{te}$ positive). Il y a donc *diminution de la pression d'amont en aval :* on dit qu'il y a «*perte de charge*».

Ceci étant admis, on peut écrire en régime stationnaire le bilan des forces parallèles à l'axe (fig. 7.20) qui s'exercent sur une couronne cylindrique de longueur $dx$, de rayons $r$ et $r + dr$; on en déduit la loi de distribution des vitesses : $v(r) = \frac{k}{4\eta}(R^2 - r^2)$, où R est le rayon de la conduite. On peut alors calculer le débit; pour la couronne comprise entre $r$ et $r + dr$, il vaut : $dD_V = (2\pi r dr) v = \frac{\pi k}{2\eta} r dr (R^2 - r^2)$ et pour tout le tube :

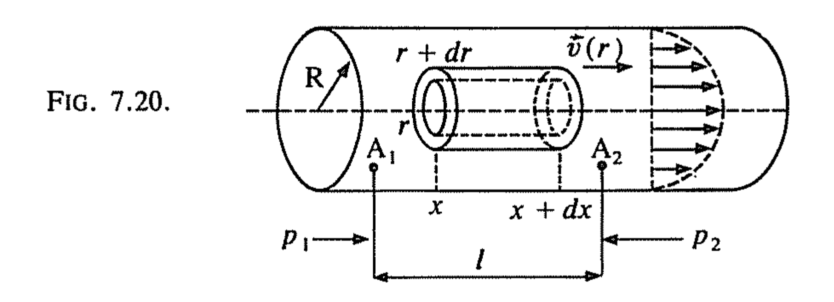



FIG. 7.20.

$$D_V = \frac{\pi k}{2\eta}\int_0^R (R^2 - r^2)\,r\,dr = \frac{\pi k}{2\eta}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R,$$

soit :

$$\boxed{D_V = \frac{\pi k R^4}{8\eta} = \frac{\pi R^4}{8\eta}\left(\frac{p_1 - p_2}{l}\right),} \qquad (7.8)$$

avec $p_1 - p_2$ = chute de pression entre deux points distants de $l$. La *loi de Poiseuille,* obtenue ci-dessus, peut être vérifiée par l'expérience représentée sur la figure 7.21; de la mesure de $\Delta p$ et $l$, on en déduit également $\eta$.

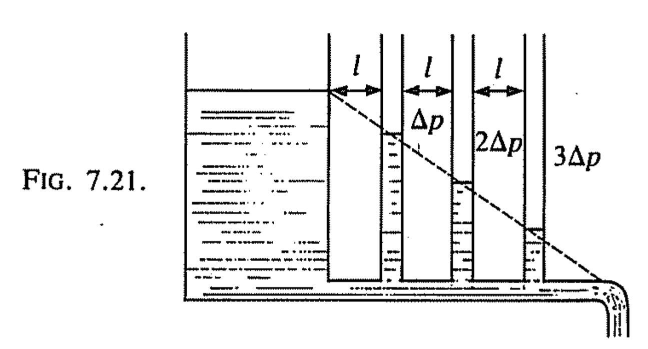



FIG. 7.21.

## 4.4 Régimes laminaire et turbulent. Nombre de Reynolds

On a supposé, dans les deux exemples ci-dessus, le régime « *laminaire* », le fluide s'écoulant en lames ou en couches de vitesses très légèrement différentes.

Quand la vitesse augmente et dépasse une certaine valeur, le régime devient « *turbulent* » : des tourbillons apparaissent, sont entraînés par le fluide, puis disparaissent, et ceci un peu partout dans l'écoulement.

On trouve que les régimes sont départagés par la valeur de l'expression :

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\rho v d}{\eta},} \qquad (7.9)$$

dans laquelle $\rho$ et $\eta$ sont respectivement la masse volumique et la viscosité du fluide, $v$ sa vitesse moyenne ( $= D_V$/section du tube), $d$ le diamètre du tube.

Cette quantité, qui s'exprime par un *nombre sans dimension*, comme on pourra le vérifier, est appelée le *nombre de Reynolds* de l'écoulement.

L'expérience montre que pour $\mathcal{R} < 2400$, le régime est laminaire; pour $\mathcal{R} > 2400$, il devient turbulent.

Ainsi, l'écoulement de l'eau dans un tube fin est presque toujours laminaire; pour $d = 1$ mm, $v = 0{,}1$ m/s, on obtient $\mathcal{R} = 10^2$. Dans une canalisation industrielle, au contraire, le régime est turbulent; pour $d = 10$ cm et $v = 0{,}1$ m/s, $\mathcal{R} = 10^4$. On notera que la *loi de Poiseuille n'est plus valable en régime turbulent :* le débit devient alors proportionnel à $\left(\frac{\Delta p}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$.

ÉLECTROCINÉTIQUE

# 5. ÉLECTROCINÉTIQUE

## 5.1 Principes généraux

Soit deux conducteurs $C_1$ et $C_2$ portés à des potentiels différents $V_1$ et $V_2 (V_1 > V_2)$; quand on les relie par un fil métallique $f$ (fig. 7.22), on observe divers effets : échauffement du fil, création d'une induction magnétique. On peut aussi mettre en évidence un effet chimique en intercalant avec $f$ un bac à électrolyse.

Ces effets n'apparaissant qu'en présence d'une différence de potentiel $V_1 - V_2$, on les interprète comme des manifestations *d'un mouvement d'ensemble de charges mobiles dans f :* on dit que «*f est parcouru par un courant* » (sous-entendu de charges).

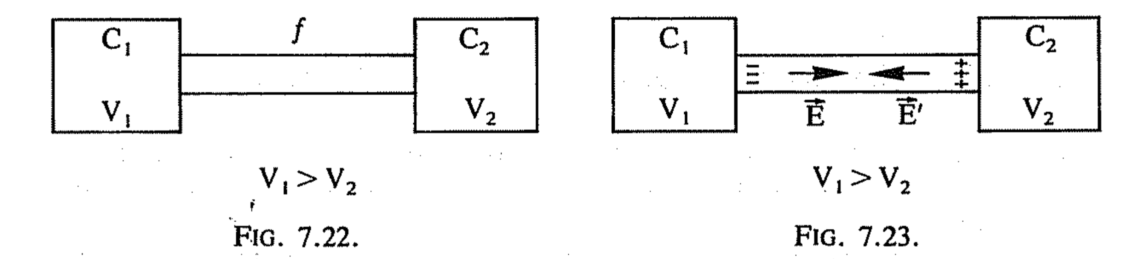



FIG. 7.22.

FIG. 7.23.

D'ailleurs, le courant entre $C_1$ et $C_2$ ne peut pas durer dans le dispositif envisagé ci-dessus : sous l'influence du champ électrique dirigé de $C_1$ vers $C_2$, les charges mobiles positives de $f$ se dirigent vers $C_2$ où elles s'accumulent (fig. 7.23); les charges mobiles négatives vont de leur côté vers $C_1$. Ces charges accumulées créent un champ $\vec{E}'$ antagoniste de $\vec{E}$, si bien que le champ total $\vec{E} + \vec{E}'$ s'annule rapidement et le mouvement s'arrête. (Le raisonnement reste le même si $f$ ne contient par exemple que des charges négatives : en s'accumulant sur $C_1$, elles rendent $C_2$ déficitaire en charges négatives, c'est-à-dire excédentaire en charges positives.) On en conclut qu'*une chaîne de conducteurs* (c'est-à-dire un circuit) *parcouru par un courant stationnaire, doit se refermer de telle manière qu'il n'y ait pas d'accumulation de charges.*

Supposons maintenant qu'un courant stationnaire ait été établi dans un circuit fermé. On sait que l'expérience est réalisable et qu'on peut vérifier la présence du courant par l'un de ses effets. Dès qu'on arrête d'entretenir ce courant, il disparaît très rapidement. L'explication est simple : les charges perdent leur vitesse par des chocs successifs, équivalents à une force de frottement.

*Le mouvement des charges est donc analogue à l'écoulement d'un fluide incompressible* (pas d'accumulation de charges) *et visqueux.*

Il y a perte de charge le long du circuit, c'est-à-dire chute du potentiel (loi d'Ohm), et dissipation d'énergie à cause de la viscosité (loi de Joule); une source d'énergie doit compenser ces pertes : c'est le rôle du générateur, analogue d'une pompe.

## 5.2 Le courant : son sens et sa conservation

*On définit son intensité* $|I|$ *comme la charge qui traverse une section du conducteur par unité de temps;* de $dq = \dot{q}\, dt$, il vient alors :

$$|I| = |\dot{q}|.$$

$|I|$ se mesure en *ampère* (A), *quatrième unité fondamentale du Système International MKSA;* le coulomb est l'unité dérivée de charge, égale à $1\ A \times 1\ s$, son équation aux dimensions s'écrivant $[Q] = [I][T]$.

1° *Convention générale de signe :* on convient *que le courant est positif quand il va dans le sens des potentiels décroissants.* Or, on sait que les charges ( + ) se déplacent dans le sens des potentiels décroissants, les charges ( − ) vers les potentiels croissants : *le sens choisi correspond au mouvement des charges ( + )* et il est opposé à celui des charges ( − ). Le même courant $+I$ peut d'ailleurs être produit par le passage pendant le temps $dt$ de $(+dq)$ dans le sens du courant (sens positif) ou par les passages de $(-dq)$ dans le sens opposé (négatif). Ce dernier cas correspond aux métaux, conducteurs où les « porteurs de charges » sont les électrons.

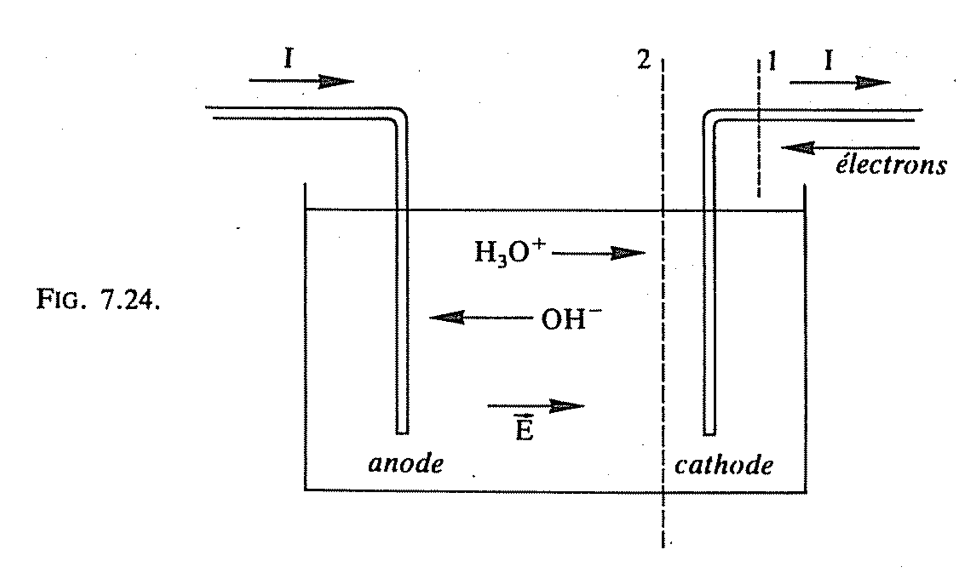



FIG. 7.24.

Considérons pour cela le passage du courant à travers un électrolyseur contenant de l'eau (fig. 7.24); on sait que celle-ci contient des ions $H_3O^+$ qui se déplacent dans le sens positif, de l'anode vers la cathode, et des ions $OH^-$ qui se déplacent dans le sens négatif; à la cathode, par exemple, les électrons apportés de l'extérieur, d'une part, se recombinent avec les $H_3O^+$ $\left(e^- + H_3O^+ \longrightarrow H_2O + \frac{1}{2} H_2 \nearrow\right)$, d'autre part, assurent le renouvellement des ions $OH^-$ qui disparaissent à l'anode $\left(e^- + H_2O \longrightarrow OH^- + \frac{1}{2} H_2 \nearrow\right)$. Mesuré au niveau de la surface 1, le courant est produit par le passage de $2e^-$ dans le sens négatif : mesuré au niveau de la surface 2, il est produit par le passage de $H_3O^+$ dans le sens de I et de $OH^-$ dans le sens opposé; ce bilan montre l'équivalence énoncée; elle est aussi vérifiée pour les effets thermiques et magnétiques.

On peut donc écrire :

$$\boxed{I = \dot{q},} \tag{7.10}$$

$dq = \dot{q}\, dt$ étant la somme des charges (+) (allant dans le sens du courant), et des charges (−) (allant dans le sens opposé) qui traversent une section du conducteur pendant le temps $dt$.

*Remarque :* Il arrive qu'on ne connaisse pas a priori le sens du courant; ayant convenu d'un sens, on peut aboutir au résultat : $I < 0$; la même définition convient : $dq$ est la somme des charges (+) allant dans le sens opposé au sens choisi et des charges (−) allant dans le sens convenu.

2° *Conservation du courant :* si le circuit fermé ne comporte aucune dérivation, le courant est le même en toute section (fig. 7.25); on peut écrire :

$$\boxed{I = j_1 S_1 = j_2 S_2 = \text{constante},} \tag{7.11}$$

en introduisant *la densité de courant j*, courant par unité de surface d'une section droite du conducteur; $j$ est d'autant plus grand que le conducteur est plus mince, et vice versa. Il se mesure couramment en $A/mm^2$.

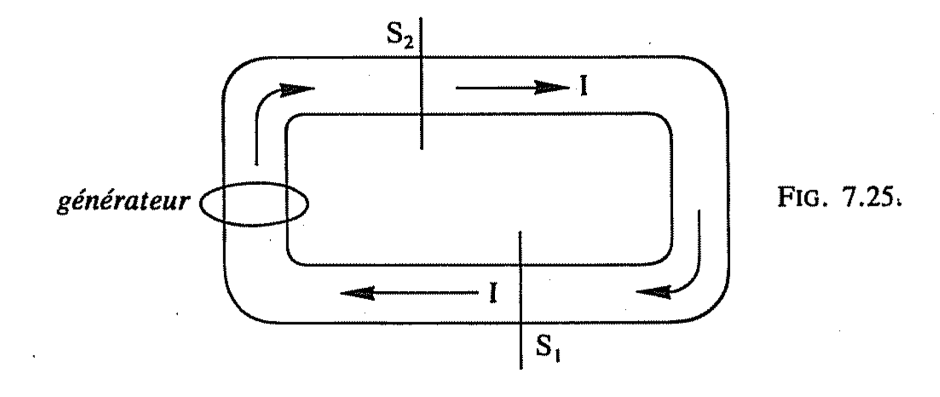



FIG. 7.25.

Si le circuit fermé comporte une dérivation (fig. 7.26), le courant doit se conserver (puisqu'il ne peut pas y avoir accumulation de charges) :

$$\boxed{I = I_1 + I_2.} \qquad (7.12)$$

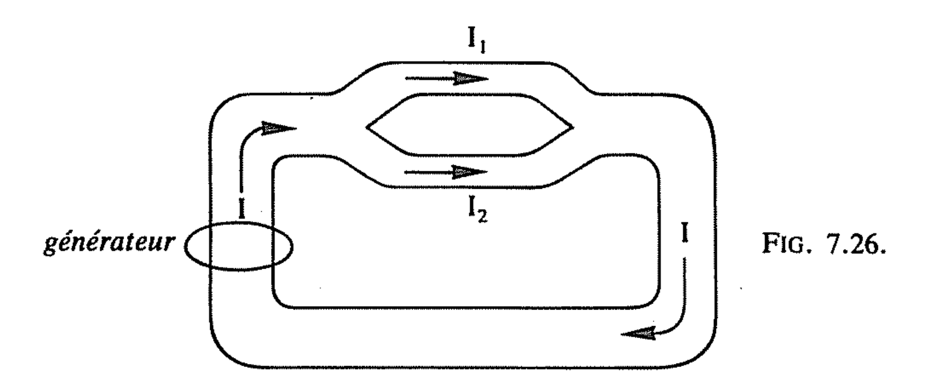



FIG. 7.26.

Ainsi, *un courant de charges est bien analogue à l'écoulement d'un fluide incompressible :* au courant correspond le débit, à la densité de courant la vitesse du fluide.

## 5.3 Loi d'Ohm, loi de Joule

La loi d'Ohm est l'équivalent de la loi de Poiseuille : de même que le débit est proportionnel à la chute de pression (fig. 7.27, a), le courant est proportionnel à la chute de potentiel (fig. 7.27, b), on pose :

$$I = \frac{1}{R}(V_1 - V_2),$$

ou :

$$\boxed{V_1 - V_2 = RI.} \qquad (7.13)$$

$p_1$ $D_V$ *fluide visqueux* $p_2$ — $V_1$ I $\vec{E}$ $V_2$ *conducteur*

(*a*) (*b*)

FIG. 7.27.

Le coefficient R *est la résistance du conducteur entre les sections* 1 *et* 2.

Pour un fil cylindrique de section S, de longueur $l$, on démontre que :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad (7.14)$$

$\rho$ étant la *résistivité* électrique du matériau.

Calculons la puissance apportée à cette portion du circuit par le champ électrique et dissipée par frottement. Pendant d$t$, arrive à la section 1 la charge I d$t$ au potentiel $V_1$, part de la section 2 la même charge au potentiel inférieur $V_2$. La portion reçoit donc l'énergie :

$$đW = (I\,dt)\,V_1 - (I\,dt)\,V_2 = I(V_1 - V_2)\,dt,$$

et :

$$\boxed{\frac{đW}{dt} = \dot{W} = P = I(V_1 - V_2) = RI^2.} \qquad (7.15)$$

*La puissance électrique apportée par le champ électrique à une résistance et dissipée par frottements est égale à* $I(V_1 - V_2)$ *ou* $RI^2$; cet énoncé constitue *la loi de Joule.*

Dans le système MKSA, R se mesure en *ohms* ($1\ \Omega = 1\ V/1\ A$), $\rho$ en ohm-mètre ($\Omega \cdot m$).

*Ordres de grandeur; conséquence pratique.* Les valeurs de $\rho$ varient énormément d'un matériau à l'autre : pour un bon conducteur, comme le cuivre, on a $\rho \sim 1{,}6 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$. Pour un bon isolant, $\rho$ atteint $10^{20}\ \Omega \cdot m$, mais cette valeur n'est donnée qu'à titre indicatif : un isolant impur ou humide peut avoir une résistivité beaucoup plus faible.

L'échauffement dû à l'effet Joule peut faire fondre le conducteur; on l'utilise pour limiter le courant avec des « fusibles ». Même sans atteindre la fusion, l'échauffement peut être dangereux; *pour le cuivre*, on admet *qu'il ne faut pas dépasser pour la densité de courant :* 4 A/mm². La puissance dissipée par unité de volume est alors égale à :

$$\frac{RI^2}{lS} = \left(\rho\,\frac{l}{S}\right)\frac{(jS)^2}{lS} = \rho j^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-8} \times (4 \cdot 10^3)^2 = 0{,}26\ W/cm^3.$$

## 5.4 Récepteurs et générateurs

L'énergie apportée par le courant n'est pas toujours dissipée par effet Joule; dans la pratique, on s'efforce même de minimiser ces pertes, en dehors des appareils de chauffage. L'énergie électrique est utilisée beaucoup plus utilement, par exemple, dans un moteur — elle est alors transformée en énergie mécanique — ou dans un bac à électrolyse (transformation en énergie chimique). Ces convertisseurs d'énergie, dont les rendements sont souvent excellents, sont des « *récepteurs* ». Les « *générateurs* » assurent une transformation inverse, à partir d'énergie mécanique (alternateur, dynamo), d'énergie chimique (accumulateur, pile) ou lumineuse (cellule photovoltaïque), etc.

Comme on l'a dit au § 5.1, un circuit parcouru par un courant permanent *doit comprendre au moins un générateur*; il *peut* aussi comprendre un ou plusieurs récepteurs. Les rôles respectifs du générateur, du ou des récepteur(s), des résistances (fig. 7.28, a), sont analogues à ceux d'une pompe, d'une turbine et d'une conduite dans un circuit hydraulique (fig. 7.28, b). Le générateur fournit la force motrice nécessaire à l'entretien du courant permanent; au contraire, le récepteur s'oppose à celui-ci plus fortement que par sa seule résistance.

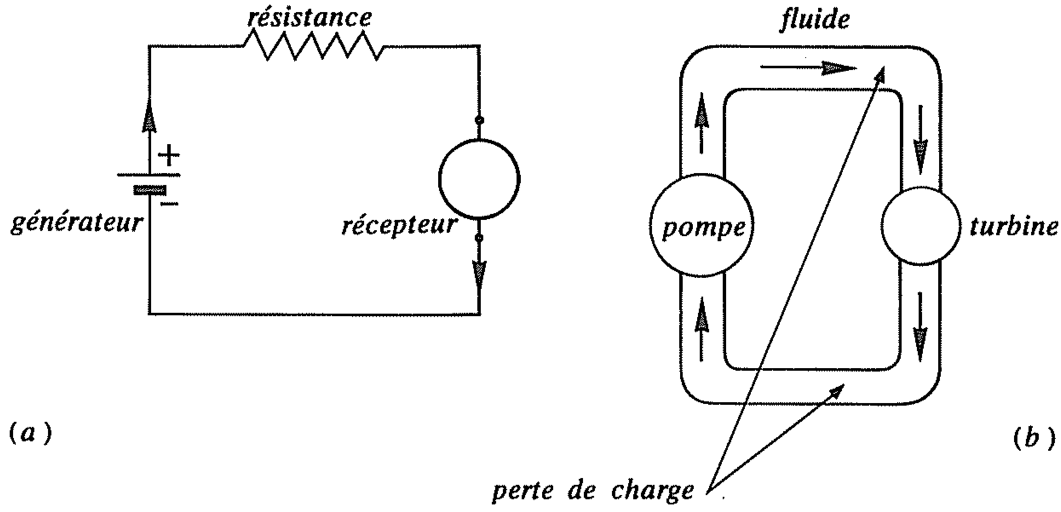



FIG. 7.28.

1° *Récepteur, force contre-électromotrice :* une portion de circuit 1-2 peut comprendre un « récepteur ». Soit R la résistance du circuit entre 1 et 2 (fig. 7.29). Le bilan d'énergie s'écrit :

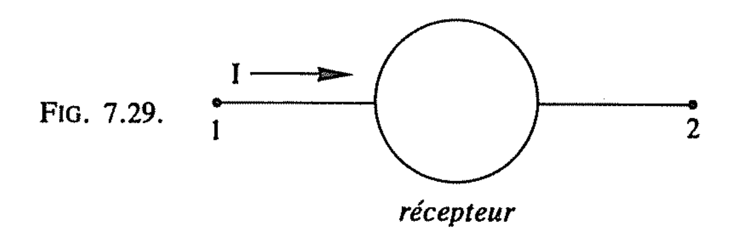



FIG. 7.29.

> Puissance apportée par le courant = Puissance dissipée par effet Joule + P (récepteur).

Comme ci-dessus, la puissance apportée par le courant est égale à $I(V_1 - V_2)$; la puissance dissipée par effet Joule est $RI^2$; enfin, P (récepteur) est la puissance $P_R$ consommée par le récepteur autrement que par effet Joule. On a donc :

$$I(V_1 - V_2) = RI^2 + P_R.$$

Si on définit la *force contre-électromotrice du récepteur* E′ par la relation :

$$\boxed{P(\text{récepteur}) = P_R = E'I,} \tag{7.16}$$

on a alors *pour la chute de potentiel aux bornes 1-2 du récepteur :*

$$\boxed{V_1 - V_2 = RI + E'.} \tag{7.17}$$

2° *Générateur, force électromotrice :* considérons maintenant un circuit comprenant un générateur et un (ou des) récepteur(s) (fig. 7.30). Soit R la résistance du circuit en dehors du générateur, $R_G$ celle du générateur, E′ la

somme des forces contre-électromotrices de tous les récepteurs. Le bilan d'énergie s'écrit dans ce cas :

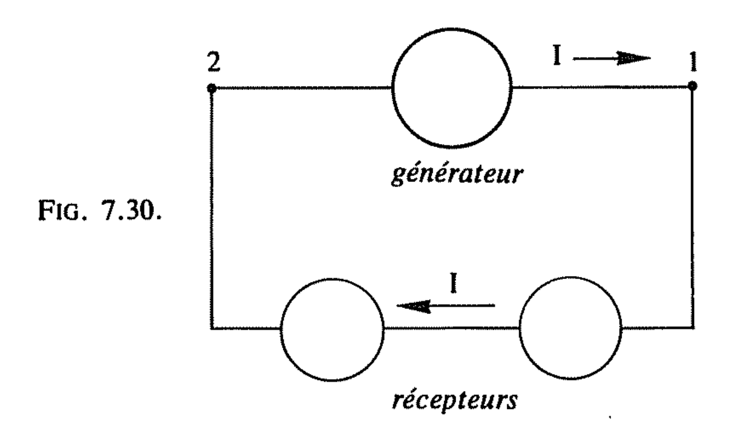



FIG. 7.30.

| |
|---|
| $P_G$ = Puissance fournie par le générateur = puissance dissipée par effet Joule + puissance cédée aux récepteurs, |

soit : $$P_G = (R + R_G)\,I^2 + E'I.$$

Comme pour le récepteur, on pose :

$$E = \frac{P_G}{I} = \textit{force électromotrice du générateur},$$

et on a : $$\boxed{E = (R + R_G)\,I + E',} \qquad (7.18)$$

ou encore : $$E - R_G I = RI + E'.$$

On reconnaît à droite la chute de potentiel $V_1 - V_2$ à travers les récepteurs (relation 7.17); à travers le générateur, on obtient alors :

$$\boxed{V_1 - V_2 = E - R_G I.} \qquad (7.19)$$

— Pour un *récepteur*, la différence de potentiel $V_1 - V_2 = V_{amont} - V_{aval}$ est égale à la chute ohmique de tension (RI) augmentée de la force contre-électromotrice.
— Pour un *générateur*, la d. d. p. $V_1 - V_2 = V_{aval} - V_{amont}$ est égale à la force électromotrice diminuée de la chute ohmique ($R_G I$).

*Remarque :* Soit une charge $q$ qui revient à son point de départ après avoir parcouru tout le circuit : on peut être tenté d'écrire que le travail du champ électrique est nul ($W_{AA} = q(V_A - V_A) = 0$); ce raisonnement est évidemment faux puisque cette charge est soumise à un frottement, dont le travail est négatif. Il faut donc en conclure que le champ électrique ne peut pas dériver d'un potentiel en tout point du circuit : c'est effectivement le cas dans les générateurs et les récepteurs; ceux-ci peuvent être décrits comme des portions du circuit

où coexistent un champ électrique dérivant d'un potentiel $\vec{E}$, *et un champ électrique* (électromoteur ou contre-électromoteur) *ne dérivant pas d'un potentiel* (fig. 7.31).

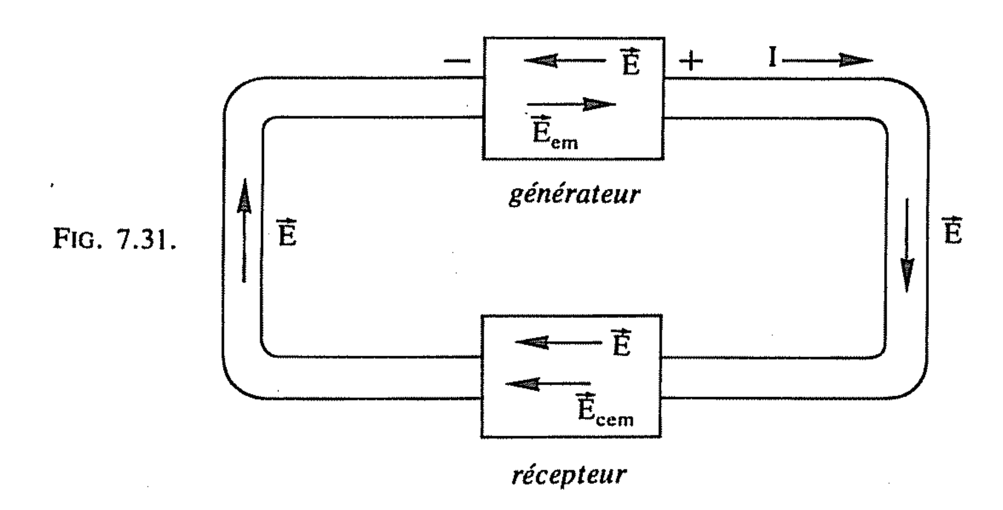



FIG. 7.31.

# 8

# REPRÉSENTATION DE FRESNEL ET COURANT ALTERNATIF

Les courants alternatifs sont beaucoup plus faciles à produire et transformer que les courants continus; ceci explique que les réseaux de tous les pays distribuent du courant alternatif. Néanmoins, au niveau de l'utilisation, on utilise très souvent du courant continu (moteurs, radio, T. V., etc.); mais la transformation alternatif ⟶ continu est facile.

Aussi, après le courant continu (chapitre 7), une brève étude des courants alternatifs s'impose; il faut alors tenir compte des effets d'induction et de capacité.

La représentation de Fresnel est particulièrement adaptée à l'étude des circuits en alternatif; aussi est-elle d'abord brièvement décrite.

## 1. REPRÉSENTATION DE FRESNEL

On considère les grandeurs :

$$V_C = V_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{et} \quad V_S = V_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

dans lesquelles $V_0$ et $\alpha$ sont des constantes positives, $t$ est le temps $\left(\omega\right.$, *pulsation*, a donc la dimension $\left.(\text{temps})^{-1}\right)$. On peut obtenir $V_C$ et $V_S$ de la manière suivante : dans un repère cartésien (O$x$, O$y$), on construit le vecteur $\overrightarrow{OM}$, de norme $V_0$, repéré par l'angle $\left(Ox, \overrightarrow{OM}\right) = \varphi = \omega t + \alpha$.

Le point M se déplace sur le cercle de rayon $V_0$ à la vitesse angulaire constante $\omega$. La constante $\alpha$, valeur de $\varphi$ pour $t = 0$, est souvent appelée la phase à l'instant origine ou « phase à l'origine ». $\varphi$ est l'angle de phase ou « phase ».

Par définition des fonctions trigonométriques, on obtient, en projetant $\overrightarrow{OM}$ sur O$x$ et O$y$ (fig. 8.1) :

$$\overline{OP} = V_0 \cos(\omega t + \alpha) = V_C,$$

$$\overline{OQ} = V_0 \sin(\omega t + \alpha) = V_S.$$

On peut remarquer d'abord qu'il suffit de considérer l'une des deux grandeurs, $V_S$ ou $V_C$; on a en effet :

$$V_S = V_0 \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

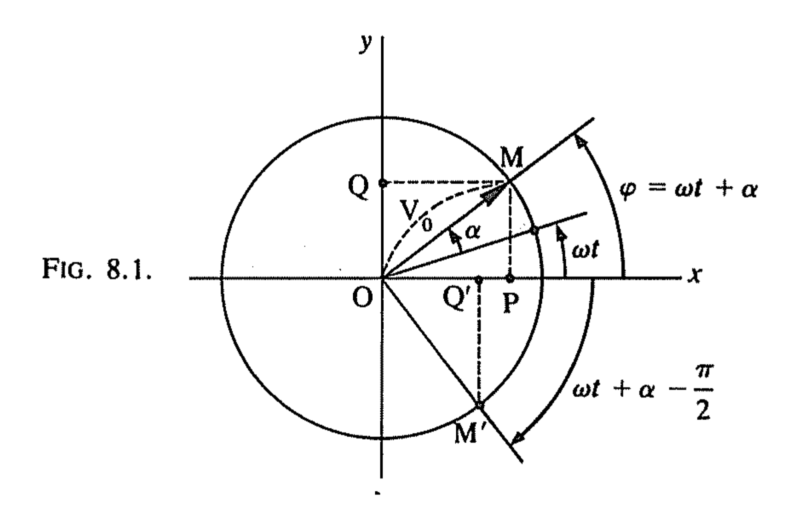



FIG. 8.1.

Pouvant obtenir $V_S$ par projection sur $Ox$ du vecteur $\overrightarrow{OM'}$, de norme $V_0$, d'angle $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{déduit de } \overrightarrow{OM} \text{ par rotation de } -\frac{\pi}{2}\right)$, on se contentera donc, pour la suite, d'utiliser la projection sur un seul axe, l'axe $Ox$ par exemple. L'intérêt de la représentation de Fresnel tient à la démarche suivante, beaucoup plus rapide qu'il n'y paraît :

— on passe des grandeurs scalaires aux vecteurs (de V à $\overrightarrow{OM}$);
— on « raisonne sur les vecteurs »;
— on revient aux grandeurs réelles qui sont des scalaires (courants, tensions, etc.).

Les règles données ci-dessous justifient et illustrent cette procédure.

## 1.1 Composition de deux vibrations harmoniques

Soit à calculer :

$$V = V_{01} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + V_{02} \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

On construit :

$\overrightarrow{OM}_1$, de norme $V_{01}$, d'angle de phase $\varphi_1 = \omega_1 t + \alpha_1$,
$\overrightarrow{OM}_2$, de norme $V_{02}$, d'angle de phase $\varphi_2 = \omega_2 t + \alpha_2$,

puis : $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2.$$

Soient P, $P_1$, $P_2$ les projections de M, $M_1$ et $M_2$ sur $Ox$ (fig. 8.2); de l'égalité vectorielle, on déduit :

$$\overline{OP} = \overline{OP}_1 + \overline{OP}_2,$$

soit : $$\overline{OP} = V = V_{01} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + V_{02} \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

*Dans le cas très important où $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, le parallèlogramme* $OM_1MM_2$ *tourne sans se déformer à la vitesse $\omega$.* V est alors une fonction sinusoïdale de $t$ avec la pulsation $\omega$ et la phase $\varphi = \omega t + \alpha$.

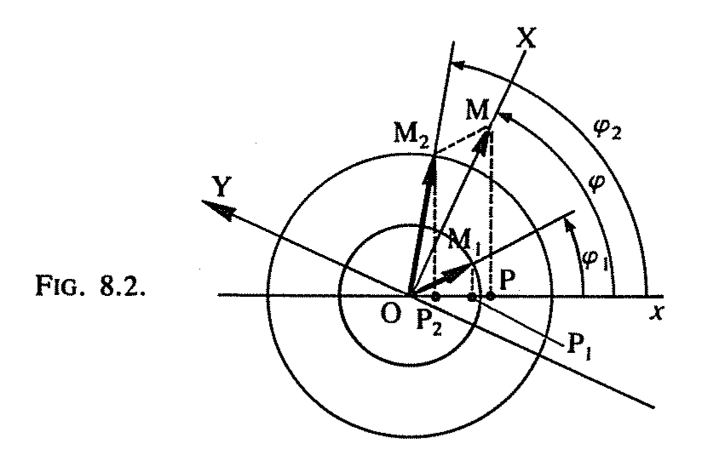



FIG. 8.2.

On peut calculer son amplitude $V_0$ et sa phase à l'origine $\alpha$ ; en projetant l'égalité vectorielle sur les axes OX $\big($tel que $\varphi = (Ox, OX)\big)$ et OY $\big($tel que $\varphi + \frac{\pi}{2} = (Ox, OY)\big)$, on obtient en effet :

$$V_0 = V_{01} \cos(\alpha_1 - \alpha) + V_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha),$$
$$0 = V_{01} \sin(\alpha_1 - \alpha) + V_{02} \sin(\alpha_2 - \alpha),$$

ou, remarquant que $\alpha_1 - \alpha = \varphi_1 - \varphi$ et $\alpha_2 - \alpha = \varphi_2 - \varphi$ :

$$V_0 = V_{01} \cos(\varphi_1 - \varphi) + V_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi),$$
$$0 = V_{01} \sin(\varphi_1 - \varphi) + V_{02} \sin(\varphi_2 - \varphi).$$

Élevant au carré et ajoutant membre à membre, on trouve :

$$V_0^2 = V_{01}^2 + V_{02}^2 + 2V_{01}V_{02} \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

(résultat qu'on peut établir en considérant le triangle $OM_1M$); de la deuxième relation, on déduit d'autre part :

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{V_{01} \sin \varphi_1 + V_{02} \sin \varphi_2}{V_{01} \cos \varphi_1 + V_{02} \cos \varphi_2}.$$

## 1.2 Dérivation et intégration

Soit $V = V_0 \cos(\omega t + \alpha)$; on a :

$$\dot{V} = -\omega V_0 \sin(\omega t + \alpha) = \omega V_0 \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

et de même : $$\ddot{V} = \omega(\omega V_0) \cos(\omega t + \alpha + \pi).$$

$V(=\overline{OP})$ étant la projection de $\overrightarrow{OM_0}(V_0, \varphi = \omega t + \alpha)$, $\dot{V}$ est la projection de $\overrightarrow{OM_1}\left(\omega V_0, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, $\ddot{V}$ est la projection de $\overrightarrow{OM_2}(\omega^2 V_0, \varphi + \pi)$, etc. (fig. 8.3).

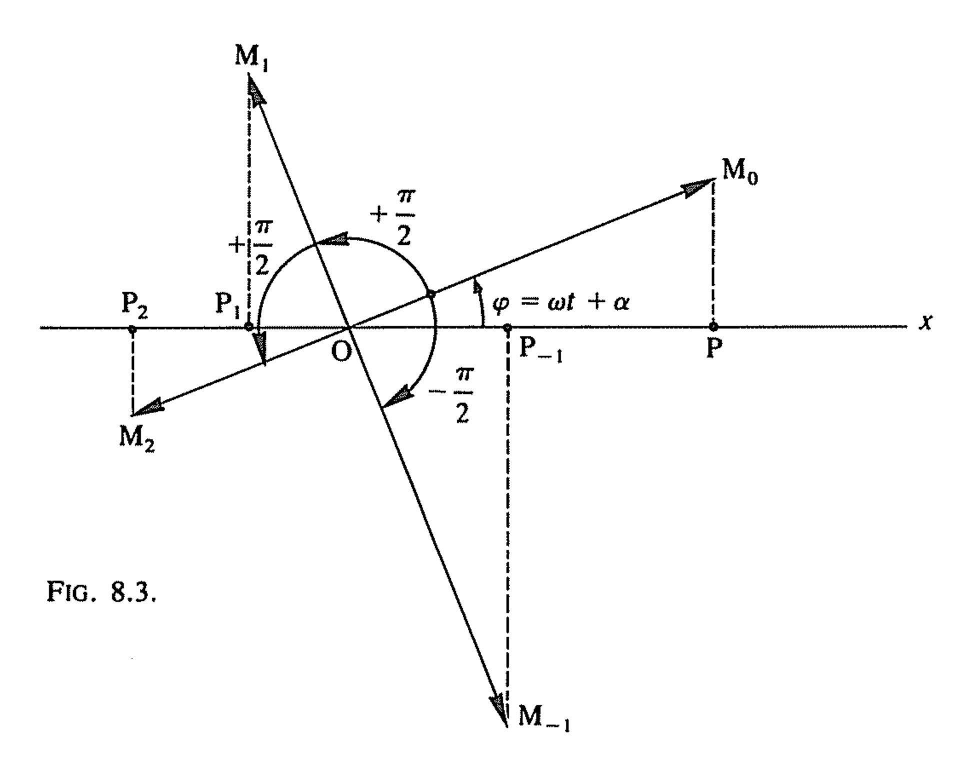



FIG. 8.3.

On calcule de même :

$$\int V\,\mathrm{d}t = \int V_0 \cos(\omega t + \alpha)\,\mathrm{d}t = \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) + C^{te}$$

$$= \frac{V_0}{\omega} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + C^{te}.$$

Dans la plupart des situations physiques envisagées, la $C^{te}$ est nulle; il reste $\int V\,\mathrm{d}t = \frac{V_0}{\omega} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$. La primitive de V s'obtient donc par la projection de $\overrightarrow{OM}_{-1}\left(\frac{V_0}{\omega}, \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ (fig. 8.3).

## 2. EFFETS D'INDUCTION

### 2.1 Flux d'induction magnétique

On considère un circuit fermé plan $\mathcal{C}$, de dimensions petites. On choisit un sens de parcours sur $\mathcal{C}$ ; un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à $\mathcal{C}$, d'origine O intérieure à $\mathcal{C}$, se trouve orienté si on se donne une convention : on convient de l'orienter de la même manière que $\vec{\omega}$, en cinématique (fig. 8.4, a).

On suppose que ce contour est dans dans une région où existe une induction magnétique $\vec{B}$. $\mathcal{C}$ étant de petites dimensions, on peut supposer que $\vec{B}$ a la même valeur et la même direction en tout point de $\mathcal{C}$.

Le *flux d'induction à travers* $\mathcal{C}$ est défini par l'expression :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S,$$

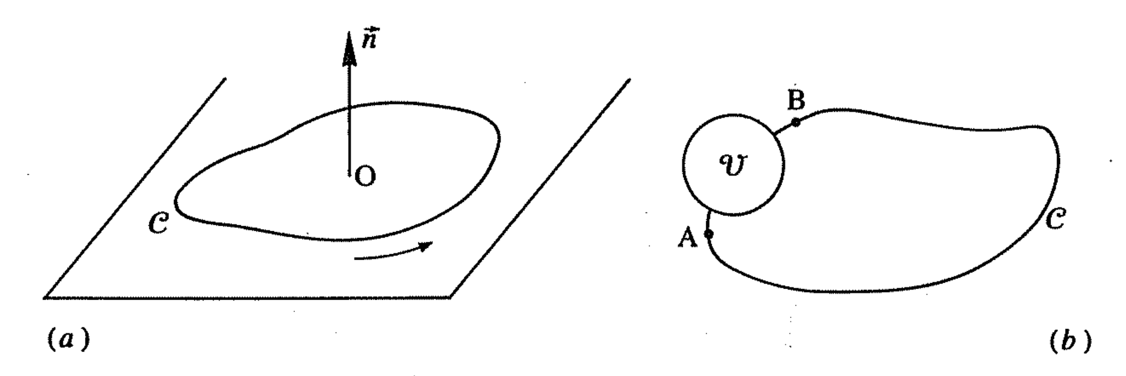



FIG. 8.4.

ou encore :

$$\boxed{\Phi = \mathrm{BS}\cos(\vec{\mathrm{B}}, \vec{n}),} \tag{8.1}$$

S désignant l'aire de $\mathcal{C}$ et B la norme de $\vec{\mathrm{B}}$.

$\Phi$ est le produit d'une induction par une surface; l'unité de mesure est le *weber* ($1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{T} \times 1\ \mathrm{m}^2$).

## 2.2 Loi de Lenz

Intercalons dans $\mathcal{C}$ un voltmètre $\mathcal{V}$ de grande résistance interne; celle-ci empêche la circulation d'un courant important dans $\mathcal{C}$. $\mathcal{V}$ permet de constater l'apparition éventuelle d'une différence de potentiel entre ses bornes A et B, qu'on suppose très proches (fig. 8.4, b).

Effectivement, si $\Phi$ varie, il apparaît une différence de potentiel :

$$\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B} = -\dot{\Phi}.$$

Il s'agit en fait d'une force électromotrice; on le constate en remplaçant le voltmètre par un ampèremètre; celui-ci, ayant une faible résistance, ne s'oppose pas au passage du courant; une variation de $\Phi$ provoque la circulation d'un courant dans $\mathcal{C}$. La force électromotrice d'induction n'a pas son siège en une région définie du circuit, elle apparaît dans tout le circuit; elle a pour expression :

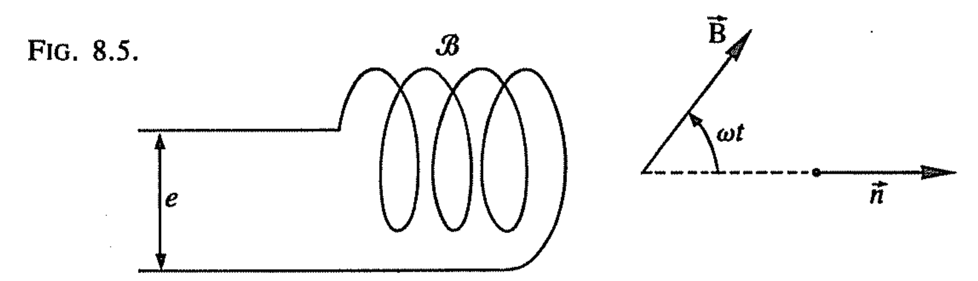
$$\boxed{e = -\dot{\Phi}.} \tag{8.2}$$

La f. é. m. d'induction s'ajoute évidemment aux autres forces électromotrices éventuellement présentes dans le circuit. Soient R sa résistance et E la somme des f. é. m., f. c. é. m. ($\mathrm{E} = \Sigma$ f. é. m. $-$ $\Sigma$ f. c. é. m.) présentes dans le circuit en dehors de la f. é. m. d'induction. On a : $\mathrm{E} + e = \mathrm{RI}$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{E} - \dot{\Phi} = \mathrm{RI}. \tag{8.3}$$

La variation de $\Phi$ peut avoir plusieurs causes : la variation de S ne se rencontre pas en pratique; c'est la variation de l'angle $(\vec{\mathrm{B}}, \vec{n})$ qui est utilisée dans les alternateurs (schéma de principe sur la figure 8.5). Mais, dans la plupart des applications, le circuit est fixe et il y a variation de $\vec{\mathrm{B}}$ à cause de la variation du courant dans le circuit lui-même (self-induction) ou dans un circuit voisin (induction mutuelle).

FIG. 8.5.




*Un aimant permanent (ou un solénoïde alimenté en courant continu) crée une induction* $\vec{B}$ *tournant à la vitesse* ω *en face d'un bobinage fixe* ℬ.
*On a, aux bornes de* ℬ,
$e = -\dot{\Phi} = -(\dot{\overline{\mathrm{BS}\cos\omega t}}) = \omega \mathrm{BS}\sin\omega t$.

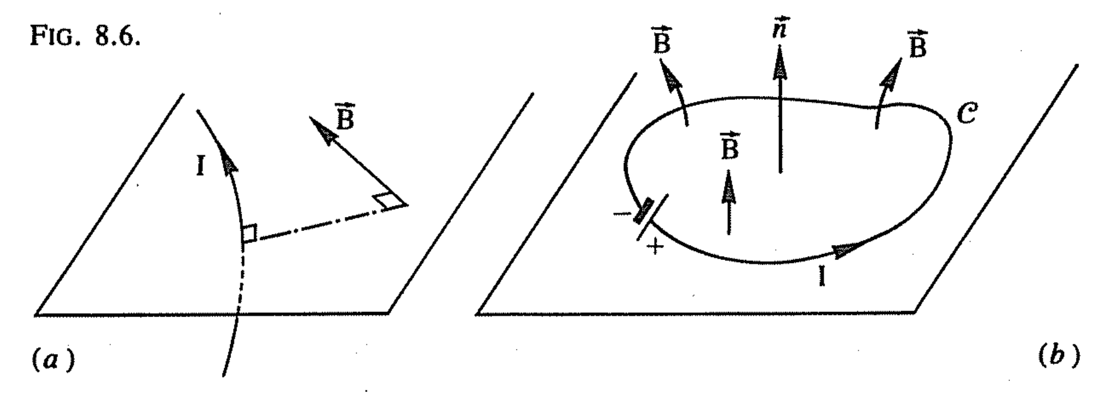
Enfin, bien que la f. é. m. d'induction prenne naissance dans tout le circuit, elle est très souvent localisée presque entièrement dans une portion du circuit; la surface présentée par un bobinage (bobine plate, solénoïde) est en général très supérieure à celle du reste du circuit, le flux est donc concentré dans cette partie du circuit, ainsi que la f. é. m. d'induction.

## 2.3 Self-induction

La variation de Φ est due à la variation du courant dans le circuit lui-même.

On rappelle que l'induction créée par un élément de courant a la disposition représentée sur la figure 8.6, a. Il s'ensuit d'après la figure 8.6, b, où on a représenté $\mathcal{C}$ et $\vec{B}$ en divers points, que Φ est positif.

FIG. 8.6.




Comme d'autre part, B est proportionnel à I, Φ est aussi proportionnel à I. On peut donc écrire :

$$\boxed{\Phi = \mathrm{LI}.} \tag{8.4}$$

*Le coefficient positif* L *est la self-induction du circuit.*

On a donc :

$$\mathrm{E} - \mathrm{L}\dot{\mathrm{I}} = \mathrm{RI} \quad \text{ou} \quad \mathrm{E} = \mathrm{L}\dot{\mathrm{I}} + \mathrm{RI}. \tag{8.5}$$

Supposons que $\mathrm{E} = 0$ pour $t < 0$, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0$ pour $t \geqslant 0$; la résolution de l'équation différentielle ci-dessus donne :

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{E}_0}{\mathrm{R}}\left[1 - \exp\left(-\frac{\mathrm{R}t}{\mathrm{L}}\right)\right];$$

I n'atteint la valeur finale $I_0 = \frac{E_0}{R}$ qu'au bout d'un temps infini, en pratique nettement supérieur à $\frac{L}{R}\cdot$ Ainsi, *la self s'oppose à l'établissement du courant*, mais elle n'a aucune influence, une fois le régime stationnaire atteint (fig. 8.7).

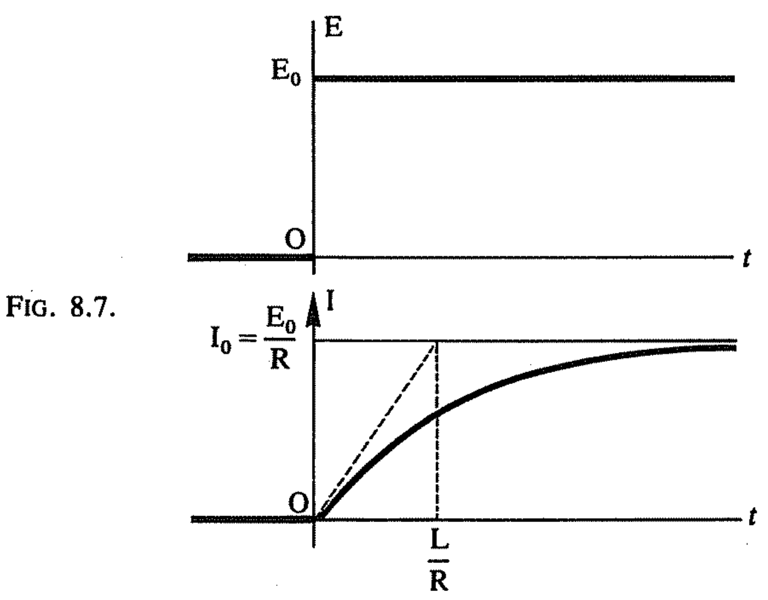



FIG. 8.7.

Faisons aussi un bilan énergétique; de la relation

$$dI = \dot{I}\,dt \quad \text{et de} \quad E = L\dot{I} + RI,$$

on déduit :

$$E\,dt = L\,dI + RI\,dt,$$

soit en multipliant par I :

$$EI\,dt = LI\,dI + RI^2\,dt.$$

Le premier membre est l'énergie fournie par le générateur pendant le temps $dt$; cette énergie est en partie dissipée par effet Joule (terme $RI^2\,dt$). Le terme restant est nouveau; intégrons-le sur un intervalle de temps très grand (O, T) nécessaire pour établir le courant $I_0$ :

$$\int_0^T L\dot{I}I\,dt = \int_0^{I_0} LI\,dI = \int_0^{I_0} L\,d\left(\frac{1}{2}\,I^2\right) = \frac{1}{2}\,LI_0^2.$$

Cette quantité est l'énergie que le générateur fournit pour établir le courant $I_0$ pendant la durée T nécessaire et en dehors de l'énergie dissipée par effet Joule. *Le générateur doit fournir cette énergie, même si la résistance du circuit est nulle.* On peut dire encore que cette énergie est stockée sous forme magnétique.

Dans le cas d'une *self localisée* c'est-à-dire concentrée dans une portion bien définie du circuit, entre A et B sur le croquis, on a (fig. 8.8) :

$$V_A - V_B = L\dot{I}\ (= E - RI). \qquad (8.6)$$

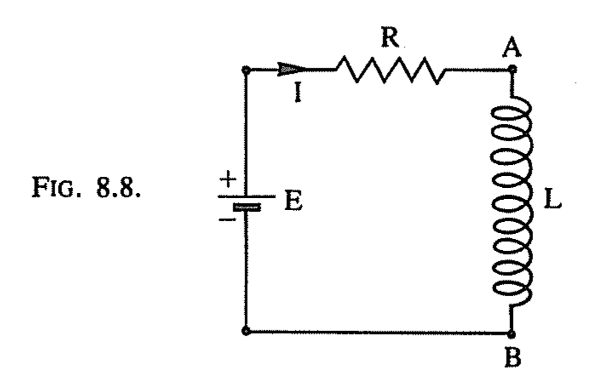



FIG. 8.8.

*La chute de potentiel aux bornes d'une self est égale à* $L\dot{I}$.

Les selfs réelles ont toujours une faible résistance $r$ et, en général, la chute ohmique $rI$ est faible devant $L\dot{I}$.

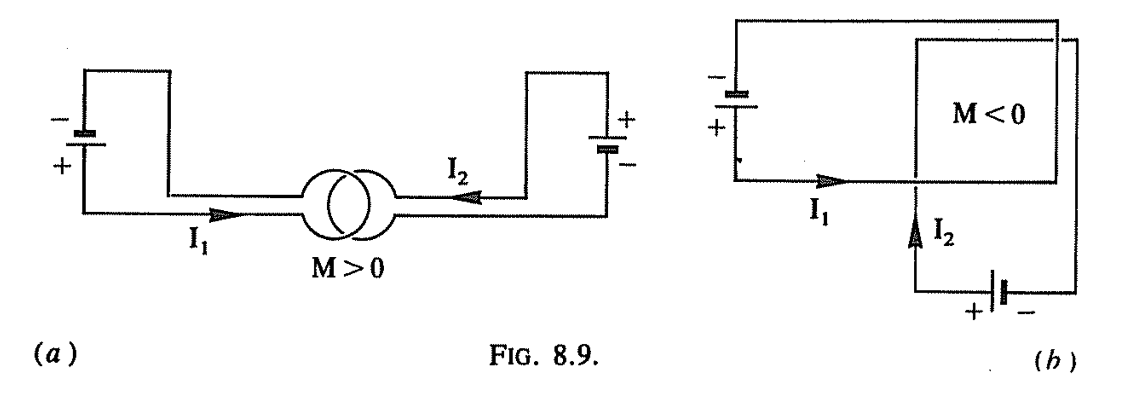
## 2.4 Induction mutuelle

Si la variation de $\Phi$ dans le circuit $\mathcal{C}_1$ est due à une variation de courant dans un circuit voisin $\mathcal{C}_2$, il apparaît dans $\mathcal{C}_1$ la force électromotrice $e = -\dot{\Phi}_{2\to1}$. $\Phi_{2\to1}$ est le flux de l'induction créée par le circuit $\mathcal{C}_2$ à travers le circuit $\mathcal{C}_1$. Comme l'induction, ce flux est proportionnel au courant qui le crée, soit $I_2$; on a donc :

$$\boxed{\Phi_{2\to1} = M_{21}I_2.} \tag{8.7}$$

On a de même : $\Phi_{1\to2} = M_{12}I_1$ et on démontre que $M_{21} = M_{12}$. Ce coefficient, appelé *coefficient d'induction mutuelle* (ou encore *mutuelle*), de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, ne dépend que de la forme de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et de leurs positions relatives.

Comme la self, la mutuelle est souvent localisée, c'est-à-dire concentrée dans une région du circuit. Mais $M(=M_{12} = M_{21})$ peut être positif ou négatif, selon la disposition des deux circuits. En se souvenant du sens de l'induction créé par un élément de courant, on vérifiera les signes de M dans les deux cas représentés sur la figure 8.9.



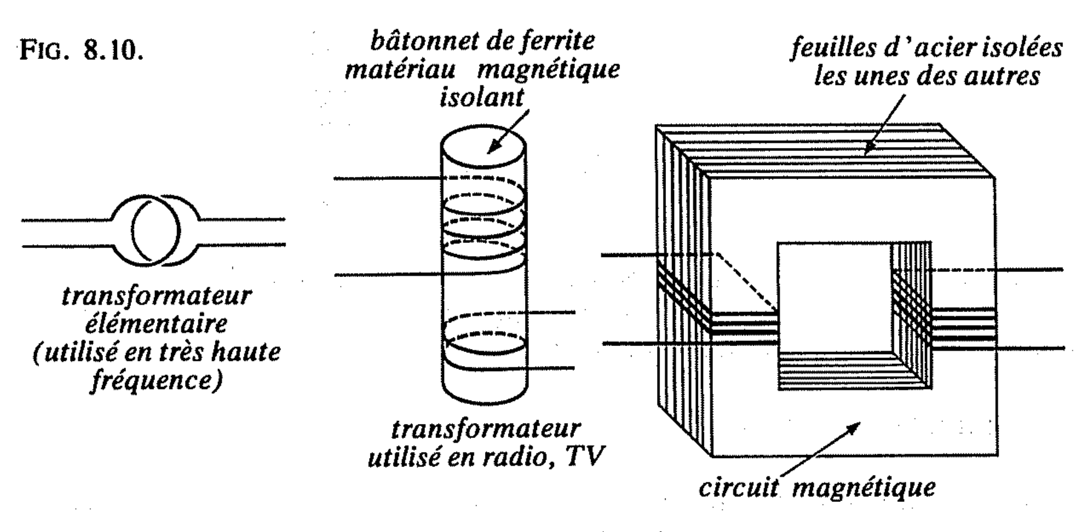

(*a*) FIG. 8.9. (*b*)

Dans $\mathcal{C}_1$ apparaît le f. é. m. d'induction : $e_1 = -M\dot{I}_2$. On aura pour ce circuit :

$$E_1 - L\dot{I}_1 - M\dot{I}_2 = RI_1. \tag{8.8}$$

Un *transformateur* (fig. 8.10) sert à coupler par mutuelle deux circuits; ceci apparaît bien sur les exemples de la figure 8.10. Le «circuit magnétique» (batonnet de ferrite, feuilles d'acier empilées) sert à canaliser

FIG. 8.10.




le flux d'induction; on admettra ici que celui-ci garde la même valeur $\varphi$ dans toute section du circuit magnétique. Soient $n_1$ et $n_2$ le nombre de spires des enroulements 1 (primaire) et 2 (secondaire). Le flux qui traverse l'enroulement 1 est donc $\Phi_1 = n_1\varphi$; il est égal à $\Phi_2 = n_2\varphi$ pour l'enroulement 2 (fig. 8.11).

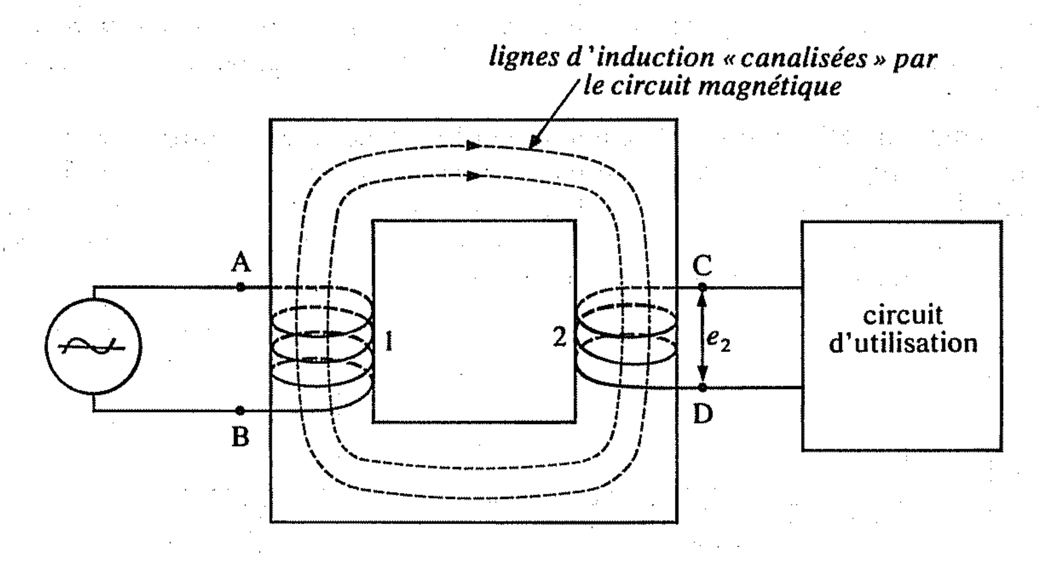



FIG. 8.11.

Supposons que l'enroulement soit alimenté sous une tension variable. On a :

$$V_1 = V_A - V_B = \dot{\Phi}_1 = n_1\dot{\varphi}.$$

Entre C et D apparaît la force électromotrice :

$$e_2 = -\dot{\Phi}_2 = -n_2\dot{\varphi}.$$

On en déduit que : $\dfrac{e_2}{V_1} = -\dfrac{n_2}{n_1}$, ou encore, le signe ayant ici peu d'importance :

$$\boxed{\left|\frac{e_2}{V_1}\right| = \frac{n_2}{n_1}.} \tag{8.9}$$

« En bobinant plus ou moins de fil » au secondaire, on peut ainsi obtenir une tension arbitrairement choisie. Si on admet que les pertes sont négligeables (pas d'effet Joule, ni de courants induits dans le circuit magnétique, etc.), la puissance apportée au primaire doit être entièrement transmise au secondaire. On aura donc, puisque la puissance est proportionnelle au produit courant-tension :

$$\left|\frac{I_2}{I_1}\right| = \frac{n_1}{n_2}. \tag{8.10}$$

Ces formules indiquent comment reconnaître le sens d'utilisation d'un transformateur; s'il doit « abaisser la tension » :

$$\left|\frac{e_2}{V_1}\right| \ll 1 \longrightarrow n_2 \ll n_1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{I_2}{I_1}\right| \gg 1,$$

le fil devra être nettement plus gros au secondaire qu'au primaire. Un examen visuel même sommaire permet d'éviter un mauvais branchement qui pourrait être catastrophique (en fabriquant du 2200 $V_{eff}$ au lieu de 22 $V_{eff}$, par exemple!).

## 3. EFFETS DE CAPACITÉ. CONDENSATEURS

Il s'agit de deux lames métalliques séparées par un isolant (fig. 8.12).

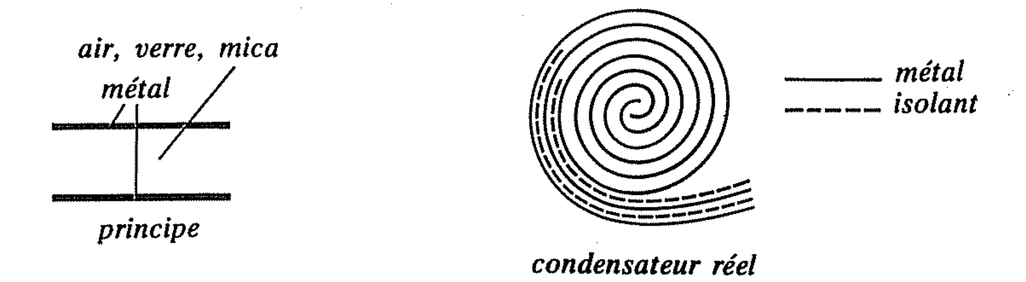



FIG. 8.12.

A l'aide d'un générateur de f. é. m. V, on peut enlever une charge Q à l'une des armatures (fig. 8.13, a) pour le transporter sur l'autre (il s'agit évidemment d'un transport d'électrons en sens inverse).

Quand on branche le générateur (fig. 8.13, b), un courant s'établit dans le sens A $\longrightarrow$ B; il s'arrête quand la d. d. p. entre les armatures a atteint la valeur V (fig. 8.13, c). On démontre que :

$$\boxed{Q = CV.} \tag{8.11}$$

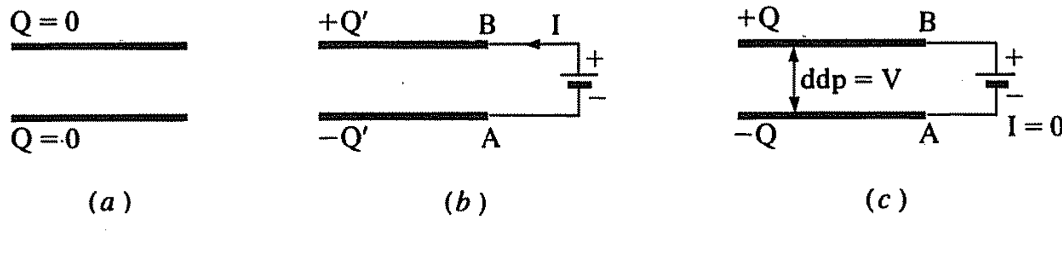



FIG. 8.13.

Le coefficient C est la capacité du condensateur; elle ne dépend que de sa géométrie et de l'isolant utilisé. C s'exprime en farad (1 farad = 1 coulomb/1 volt), mais le $\mu$F et le $n$F sont les ordres de grandeur les plus habituels (1 $\mu$F = $10^{-6}$ F; 1 $n$F = $10^{-9}$ F).

Le courant qui circule dans AB à travers le générateur est alors (fig. 8.13, b) :

$$\boxed{I = \dot{Q} = C\dot{V},} \tag{8.12}$$

avec $$V = V_B - V_A.$$

(I est positif quand Q augmente, négatif quand Q diminue.)

Quant à l'énergie emmagasinée, elle est aisément calculable. Faisons croître V de dV, le condensateur étant déjà chargé sous le potentiel V. Il y a transfert de la charge dQ de A à B. Le générateur doit fournir l'énergie :

$$đW = V\,dQ = V(C\,dV).$$

Donc, pour charger le condensateur de O à $V_0$, il faut fournir l'énergie :

$$W = \int_0^{V_0} CV\,dV = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV_0.$$

Cette énergie est stockée dans le condensateur.

## 4. COURANT SINUSOÏDAL

La f. é. m. du générateur est une fonction sinusoïdale du temps. Il en est de même des courants dans les diverses branches et des différences de potentiel entre 2 points quelconques du circuit.

### 4.1 Aux bornes d'une résistance

$$V(t) = V_1 - V_2 = V_0 \cos \omega t = RI,$$

d'où : $$I = \frac{V_0}{R}\cos \omega t = I_0 \cos \omega t.$$

*La d.d.p. et le courant aux bornes de R sont en phase.*

### 4.2 Aux bornes d'une self

$$V(t) = V_1 - V_2 = V_0 \cos \omega t = L\dot{I},$$

d'où :

$$I = \frac{V_0}{L\omega} \sin \omega t = \frac{V_0}{L\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

*Le courant est en quadrature retard sur la tension.*

### 4.3 Aux bornes d'une capacité

On a : $I = C\dot{V}$ et $V = V_0 \cos \omega t$. Donc :

$$I = -CV_0\omega \sin \omega t = C\omega V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

I *est en quadrature avance sur* V.

Ces résultats sont résumés, dans la représentation de Fresnel, sur la figure 8.14.

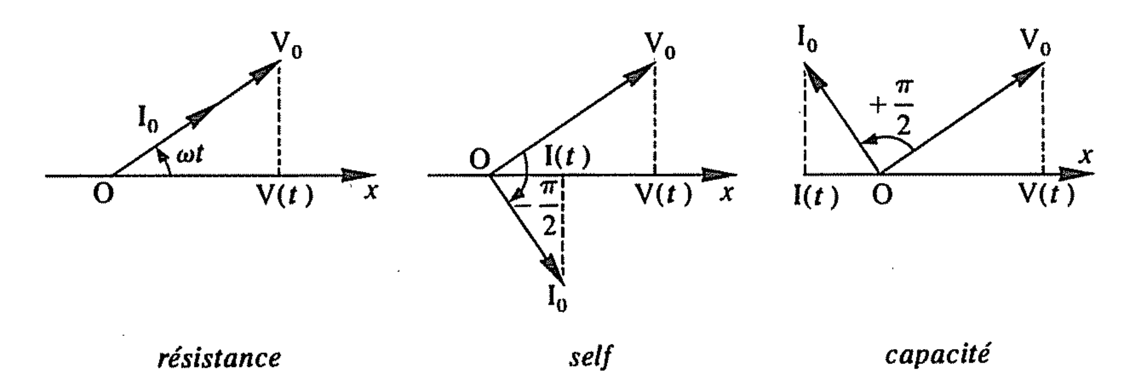



FIG. 8.14.

### 4.4 Impédance

Chaque élément passif (résistance, self, capacité) se caractérise, d'une part par son *impédance* $Z = V_0/I_0$, rapport entre l'amplitude de la tension appliquée entre ses extrémités et l'amplitude du courant, d'autre part, par le déphasage $\varphi$ qu'il provoque entre tension et courant. On a obtenu les résultats suivants :

| | Résistance | Self | Capacité |
|---|---|---|---|
| Impédance Z | R | $L\omega$ | $\dfrac{1}{C\omega}$ |
| $\varphi$ ( = phase de V − phase de I). | 0 | $+\dfrac{\pi}{2}$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ |

(8.13)

*Élément actif :* on entend par là les générateurs, les récepteurs (et les éléments qui ont les deux fonctions, comme un transistor). Ces éléments seront caractérisés par leur force électromotrice (ou contre-électromotrice) et leur impédance interne (les deux dépendant de la fréquence).

*Exemples d'utilisation :*

1° Circuit comportant une *résistance et* une *capacité en série* (circuit RC) (fig. 8.15, a).

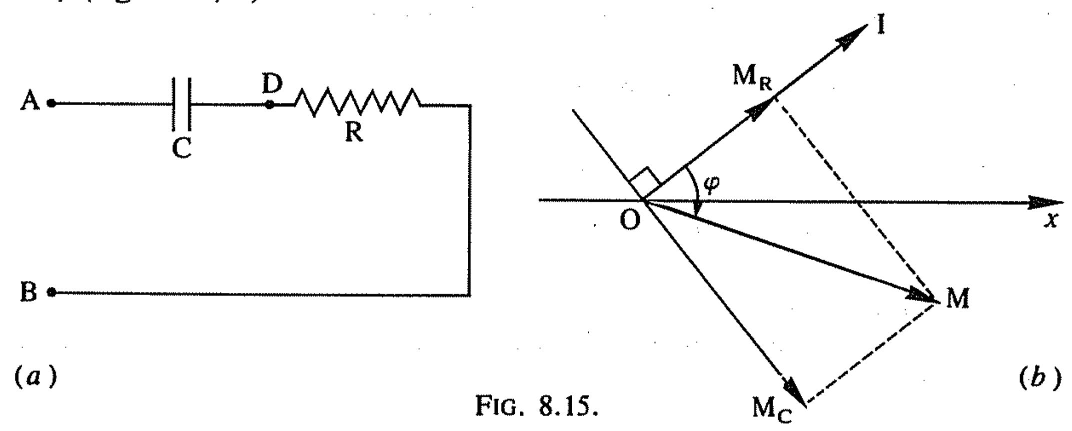



FIG. 8.15.

Les deux éléments sont parcourus par le même courant; il est donc logique de le prendre pour référence (vecteur $\overrightarrow{OI}$). Les différences de potentiel ont alors les amplitudes et les phases (par rapport à I) suivantes :

| | $V_A - V_D$ | $V_D - V_B$ | $V_A - V_B$ |
|---|---|---|---|
| Amplitude | $I_0/C\omega$ | $RI_0$ | $V_0$ |
| Phases | $-\pi/2$ | 0 | $\varphi$ |
| Vecteurs représentatifs | $\overrightarrow{OM_C}$ | $\overrightarrow{OM_R}$ | $\overrightarrow{OM}$ |

De l'égalité $V_A - V_B = (V_A - V_D) + (V_D - V_B)$, on passe à l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_C} + \overrightarrow{OM_R}$. Dans le triangle $OM_RM$, on calcule (fig. 8.15, b) :

$$OM^2 = V_0^2 = OM_R^2 + M_RM^2 = R^2I_0^2 + I_0^2/(C\omega)^2 = I_0^2(R^2 + 1/C^2\omega^2),$$

ou

$$V_0 = I_0[R^2 + 1/C^2\omega^2]^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\text{tg}\ \varphi = OM_C/OM_R = 1/RC\omega.$$

La tension $(V_A - V_B)$ est en retard (de $\varphi$) sur le courant, ou encore, si la tension $V_A - V_B$ est imposée, le courant est en avance (de $\varphi$) sur la tension. L'impédance du circuit est $(R^2 + 1/(C\omega)^2)^{1/2}$. A basse fréquence, l'impédance de la capacité est très grande et l'emporte sur celle de la résistance; c'est le contraire à haute fréquence.

Ce circuit peut être utilisé comme *filtre :* supposons en effet que $V_A - V_B$ soit la superposition de tensions sinusoïdales de fréquences différentes; prélevons la tension aux bornes de la résistance $V_D - V_B$ qui

est proportionnelle au courant; celui-ci est, comparativement, beaucoup plus faible à basse fréquence qu'à haute fréquence; les composantes à basse fréquence de $V_D - V_B$ seront donc très atténuées. On obtiendrait évidemment le résultat inverse si on prélevait la tension aux bornes de la capacité $V_D - V_A$.

2° Circuit comportant une *résistance et* une *self en série* (circuit RL). Un calcul tout à fait analogue montre que le courant est alors en retard de phase sur la tension ($\text{tg}\,\varphi = L\omega/R$) et que $Z = (R^2 + L^2\omega^2)^{1/2}$. L'impédance de la self est négligeable à basse fréquence, prépondérante à haute fréquence.

3° Le même calcul peut être appliqué à des éléments placés en série; on trouve facilement que :
*deux selfs en série* ($L_1$ et $L_2$) sont équivalentes à une self de valeur

$$L = L_1 + L_2; \qquad (8.14,\ a)$$

*deux capacités en série* ($C_1$ et $C_2$) sont équivalentes à une capacité C telle que

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2. \qquad (8.14,\ b)$$

4° Circuit comportant une *résistance*, une *self et* une *capacité en série* (circuit RLC).

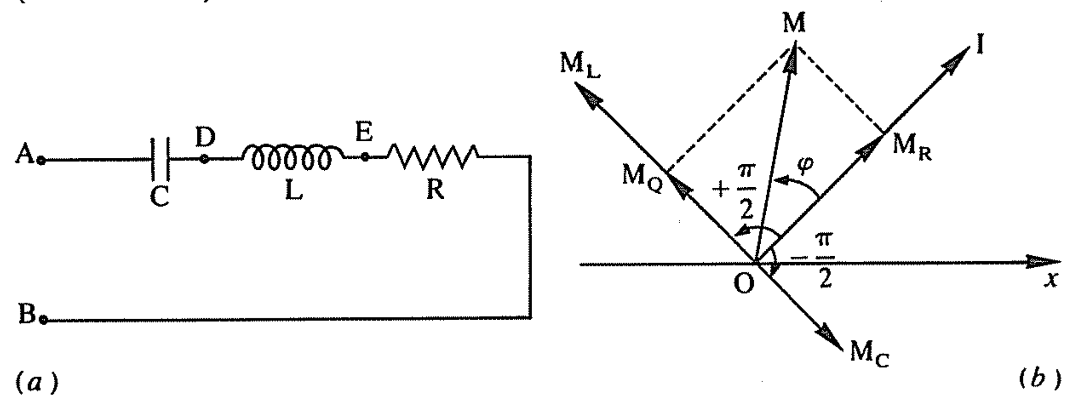



FIG. 8.16.

On prendra encore le courant comme référence ($\overrightarrow{OI}$). On obtient le tableau suivant :

| | $V_A - V_D$ | $V_D - V_E$ | $V_A - V_E$ | $V_E - V_B$ | $V_A - V_B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Ampl. | $I_0/C\omega$ | $L\omega I_0$ | $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0$ | $RI_0$ | $V_0$ |
| Phases | $-\pi/2$ | $\pi/2$ | $\pi/2$ | 0 | $\varphi$ |
| Vecteurs | $\overrightarrow{OM_C}$ | $\overrightarrow{OM_L}$ | $\overrightarrow{OM_Q}$ | $\overrightarrow{OM_R}$ | $\overrightarrow{OM}$ |

Des égalités $V_A - V_B = (V_A - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_B)$ et $V_A - V_E = (V_A - V_D) + (V_D - V_E)$, on déduit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_C} + \overrightarrow{OM_L} + \overrightarrow{OM_R} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_Q} = \overrightarrow{OM_C} + \overrightarrow{OM_L},$$

d'où encore : $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_Q} + \overrightarrow{OM_R}.$$

Dans le triangle $OM_RM$, on calcule (fig. 8.16, b) :

$$OM^2 = V_0^2 = OM_R^2 + M_RM^2 = (RI_0)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I_0^2,$$

soit :
$$V_0 = I_0\left[R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

et :
$$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}.$$

L'impédance est très grande aux basses fréquences, à cause de la capacité, et aux hautes fréquences, à cause de la self. Elle passe par un minimum pour $L\omega = 1/C\omega$ ou $\omega^2 = \omega_0^2 = 1/LC$ : il y a *résonance* ; quand on fait varier la fréquence en maintenant constante l'amplitude $V_0$ de la tension appliquée, $I_0$ passe par un maximum pour $\omega = \omega_0$; si la résistance R est faible, le maximum est aigu, les tensions aux bornes de L et de C peuvent devenir importantes, très supérieures même à $V_0$ (fig. 8.17).

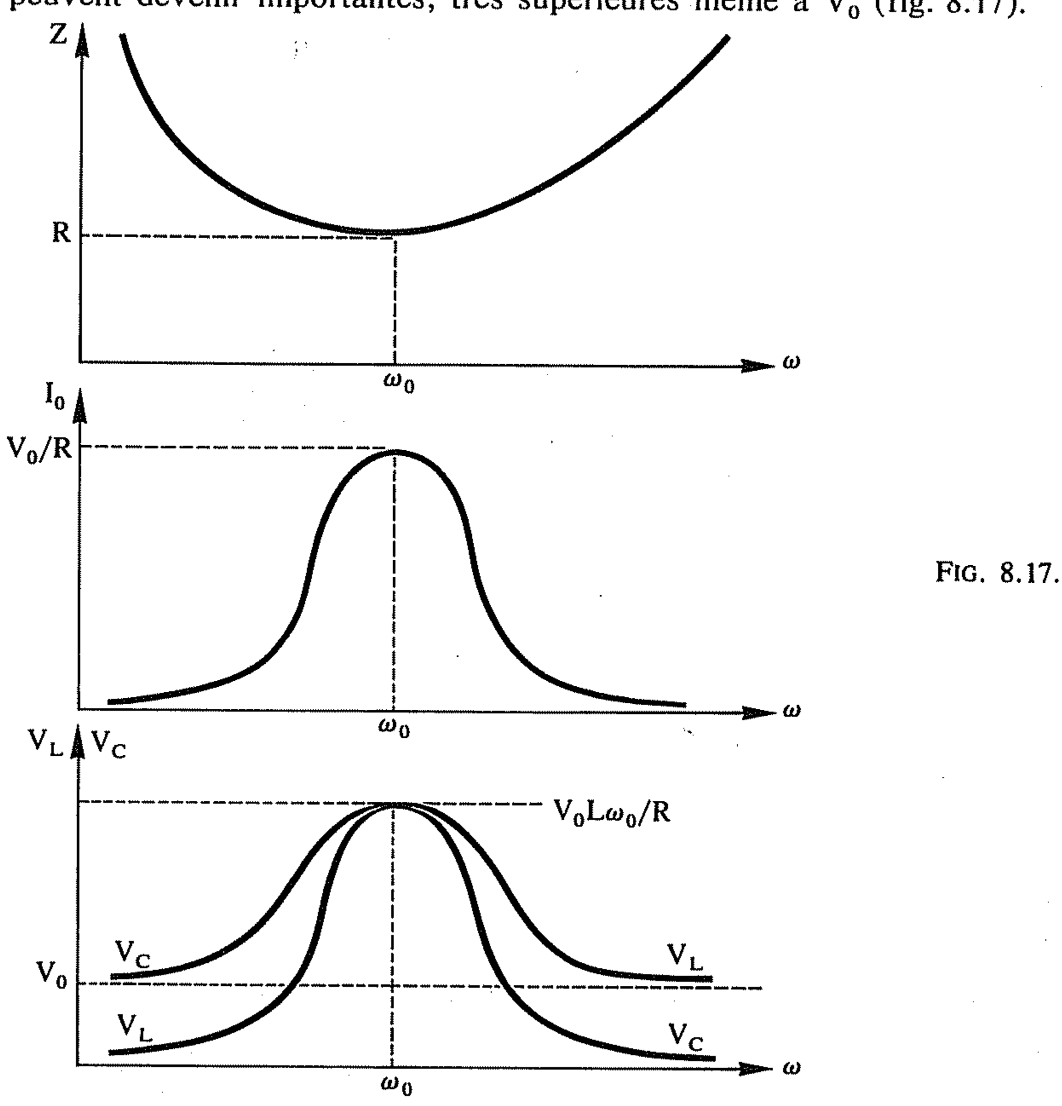
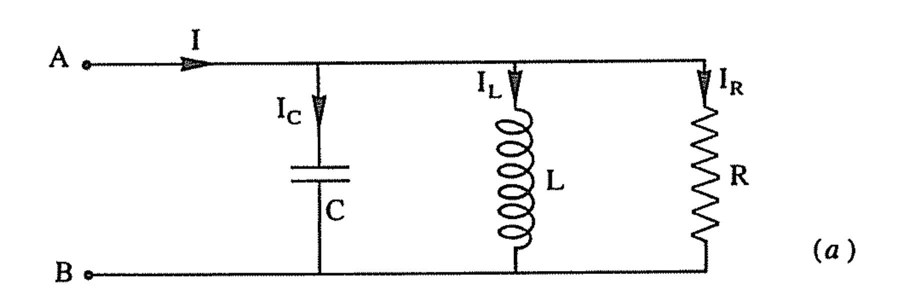



FIG. 8.17.

Pour $\omega \neq \omega_0$, il y a déphasage entre courant et tension. Dans la pratique, en particulier pour toutes les applications industrielles, on a intérêt à annuler ce déphasage, c'est-à-dire à se placer à la résonance : si le circuit contient une résistance et une self, on insère en série une capacité C telle qu'à la fréquence utilisée, on ait $LC\omega^2 = 1$.

5° *Circuit parallèle* (fig. 8.18, a) : en prenant ici la tension $V = (V_A - V_B)$ comme référence, on obtient pour les amplitudes et les phases des différents courants :



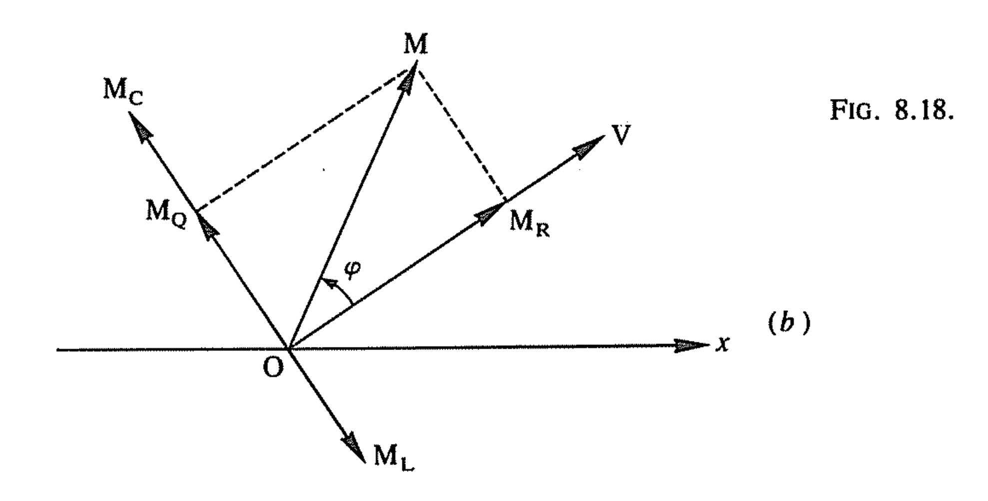




FIG. 8.18.

| | $I_C$ | $I_L$ | $I_C + I_L$ | $I_R$ | I |
|---|---|---|---|---|---|
| Amplitudes | $C\omega V_0$ | $V_0/L\omega$ | $(C\omega - 1/L\omega)V_0$ | $V_0/R$ | $I_0$ |
| phases | $+\pi/2$ | $-\pi/2$ | $+\pi/2$ | 0 | $\varphi$ |
| Vecteurs | $\overrightarrow{OM_C}$ | $\overrightarrow{OM_L}$ | $\overrightarrow{OM_Q}$ | $\overrightarrow{OM_R}$ | $\overrightarrow{OM}$ |

On calcule comme précédemment (fig. 8.18, b) :

$$I_0^2 = V_0^2\left[1/R^2 + (C\omega - 1/L\omega)^2\right].$$

Si $V_0$ est fixée, $I_0$ est minimum à la résonance $\left(\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}\right)$; pour cette raison, ce circuit est appelé *circuit-bouchon*.
Si, au contraire, on fixe $I_0$, $V_0$ passe par un maximum à la résonance.

6° Appliquant le même calcul au cas d'*éléments* analogues placés *en parallèle*, on trouve :
que deux selfs sont équivalents à une self L telle que

$$1/L = 1/L_1 + 1/L_2; \qquad (8.15, a)$$

que deux capacités sont équivalentes à une capacité C telle que

$$C = C_1 + C_2. \qquad (8.15, b)$$

## 5. PUISSANCE CONSOMMÉE PAR LE CIRCUIT

En appliquant les règles qui ont été rappelées ci-dessus à un circuit, on peut donc obtenir d'une part l'impédance Z, d'autre part le déphasage $\varphi$ de la tension par rapport au courant. Le courant et la tension ont pour expression :

$$I = I_0 \cos \omega t,$$
$$V = V_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

avec $Z = V_0/I_0$.

On a vu (au chapitre 7) que la puissance consommée par le circuit est égale à VI; on aura donc :

$$\begin{aligned} P = VI &= V_0 I_0 \cos \omega t \ \cos(\omega t + \varphi), \\ &= \frac{V_0 I_0}{2}\left[\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right]. \end{aligned} \tag{8.16}$$

P contient un terme constant et un terme oscillant à la pulsation $2\omega$. Si on calcule la *puissance moyenne*, ce dernier terme donne une contribution nulle; il reste :

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi.} \tag{8.17}$$

Soit Z l'impédance de la portion de circuit considérée, R sa résistance. On sait que :

$$V_0 = ZI_0 \quad \text{et} \quad Z \cos \varphi = R.$$

On peut donc écrire $\langle P \rangle$ sous la forme :

$$\langle P \rangle = \frac{(ZI_0)\, I_0}{2} \cos \varphi = \frac{RI_0^2}{2}.$$

### 5.1 Courant et tension efficaces

Si on pose $I_{eff} = I_0/\sqrt{2}$, on obtient :

$$\langle P \rangle = RI_{eff}{}^2. \tag{8.18}$$

La formule a la même forme qu'en courant continu. On peut aussi poser :

$$V_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}.$$

On a alors :

$$\boxed{\langle P \rangle = V_{eff} I_{eff} \cos \varphi.} \tag{8.19}$$

*Remarques : a*) les tensions indiquées habituellement (220 volts — 127 volts — 380 volts) sont des tensions efficaces;

*b*) les contrôleurs universels du commerce indiquent des tensions efficaces et des courants efficaces;

*c*) attention! si on exprime P en fonction de $V_{eff}$, on obtient :

$$<P> = V_{eff}\left(\frac{V_{eff}}{Z}\right)\cos\varphi = \frac{V_{eff}^2\cos\varphi}{Z},$$

et non pas $V_{eff}^2/R$ comme on pourrait le croire d'après le résultat obtenu en courant continu.

## 5.2 Importance du cos φ

Si $<P>$ et $V_0$ (ou $V_{eff}$) sont fixées, le courant est minimum quand $\cos\varphi$ est maximum.

Or, on cherche toujours à minimiser le courant, à la fois pour diminuer les pertes par effet Joule et pour éviter les chutes ohmiques de tension. Il est donc important que le $\cos\varphi$ d'un circuit reste aussi proche que possible de 1.

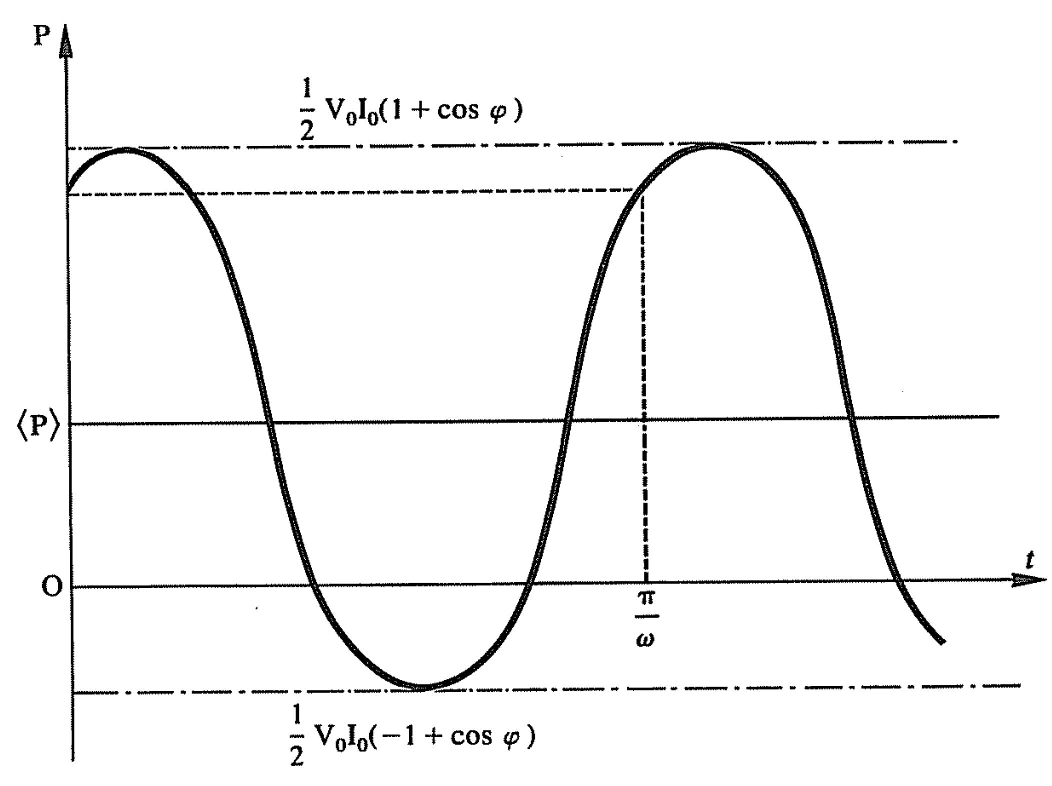



FIG. 8.19.

(On remarque d'ailleurs que, pour $\cos\varphi < 1$, la puissance P consommées par le circuit, est par moment négative (fig. 8.19), ce qui signifie qu'il restitue alors de l'énergie; il a absorbé trop d'énergie donc trop de courant, pendant les intervalles de temps où P est positive; ce fonctionnement est, si on peut dire, malsain.)

Pour les appareils industriels (alternateurs, transformateurs, moteurs), on indique généralement la valeur de $V_{eff}I_{eff}$ en volts × ampères (V. A.) et la valeur de $\cos\varphi$.

Un bon moteur a un cos $\varphi$ supérieur à 0,9. D'autres appareils, comme les postes de soudure à l'arc, ont des cos $\varphi$ beaucoup plus bas (0,5 à 0,6); il faut alors « remonter le cos $\varphi$ », en insérant des capacités si l'impédance est selfique (cas le plus fréquent) pour se rapprocher de la résonance.

## 5.3 Circuit purement selfique ou purement capacitif

On a alors $\varphi = \pi/2$ (self pure) ou $\varphi = -\pi/2$ (capacité pure); dans les deux cas, $\cos \varphi = 0$.

Donc, en moyenne, une self (ou une capacité) ne consomme pas d'énergie; l'énergie est stockée par la self (tant que I augmente), puis restituée (quand I diminue), de nouveau stockée, etc.

# PHYSIQUE GÉNÉRALE 1
## mécanique
## électricité

# TABLE DES MATIÈRES

